IGCP
Instituto de Gestão da Tesouraria
e do Crédito Público, I.P.

Modelos Dinâmicos da Estrutura de Prazo das Taxas de Juro

Uma aplicação da abordagem de Nelson e Siegel (1987) reformulada por Diebold e Li (2006) e comparação com a Análise de Componentes Principais

Jorge Guedes

Julho, 2008

As opiniões expressas neste trabalho são da inteira responsabilidade do autor e não devem ser interpretadas como reflectindo as opiniões do IGCP ou dos seus membros.

Modelos Dinâmicos da Estrutura de Prazo das Taxas de Juro

Uma aplicação da abordagem de Nelson e Siegel (1987) reformulada por Diebold e Li (2006) e comparação com a Análise de Componentes Principais

Jorge Guedes[1]
IGCP – Instituto de Gestão da Tesouraria e do Crédito Público, I. P.
Núcleo de Controlo Financeiro
jorge.guedes@igcp.pt

As opiniões expressas neste trabalho são da inteira responsabilidade do autor e não devem ser interpretadas como reflectindo as opiniões do IGCP ou dos seus membros.

0. SUMÁRIO 3
1. INTRODUÇÃO 3

PARTE I: ANÁLISE TEÓRICA 5

2. FACTORES DE DESCONTO, TAXAS FORWARD E TAXAS SPOT 5
3. UMA CLASSIFICAÇÃO NÃO EXAUSTIVA DOS MODELOS 5
3.1. Modelos de Equilíbrio 6
3.2. Modelos de Não-Arbitragem 6
3.3. Modelos Empíricos 6
4. ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS 7
4.1. Caracterização da Metodologia 8
4.2. Algumas Considerações acerca da Standardização e Estacionaridade dos Dados 10
4.3. Simulação Monte Carlo usando ACP 11
5. A ABORDAGEM DE NELSON E SIEGEL 12
5.1. Nelson e Siegel (1987) 12
5.2. Extensões de Bliss (1996) e Svensson (1994) a Nelson e Siegel 13
5.3. Nelson e Siegel como um Modelo Dinâmico a 3 Factores 14
5.4. Métodos de Estimação 16
5.4.1 Estimação em Duas Etapas 16
5.4.2 Filtro de Kalman 17

PARTE II: ANÁLISE EMPÍRICA 19

6. DADOS 19
7. RESULTADOS DA ESTIMAÇÃO 21
8. RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES 25
9. CONCLUSÃO 34
10. INVESTIGAÇÃO FUTURA 34
11. BIBLIOGRAFIA 35

[1] Gostaria de agradecer a Rita Granger, do IGCP, pelo seu útil contributo e interesse neste trabalho. Gostaria também de agradecer a a Paulo Leiria, do IGCP, pelos seus valiosos comentários. Como é habitual, o autor é o único responsável por quaisquer erros ou omissões.

0. Sumário

Este estudo tem como objectivo modelizar e realizar uma análise de cenários da Estrutura de Prazo das Taxas de Juro (EPTJ) com a abordagem de Nelson e Siegel (N&S). Na sua essência, esta metodologia tem fortes semelhanças com a Análise de Componentes Principais (ACP), que são ilustradas com os resultados das estimações e simulações apresentadas ao longo do texto. Neste estudo, comparam-se tanto N&S como ACP na sua capacidade de previsão "out-of-sample" da EPTJ. Na abordagem seguida analisa-se em que medida as trajectórias simuladas para as taxas de juro estão próximas das características da distribuição histórica. Considerou-se relevante comparar as taxas de juro, os spreads entre diferentes maturidades e medidas da curvatura em diferentes partes da EPTJ. A metodologia de Nelson e Siegel é fiável para simular a EPTJ. Com a excepção feita para a assimetria e a curtose, as simulações apresentadas neste trabalho descrevem com sucesso a distribuição histórica das taxas de juro, spreads e curvaturas. Isto é válido para qualquer horizonte temporal que escolhamos para fazer as simulações.

1. Introdução

A estrutura de prazo das taxas de juro (EPTJ), também algumas vezes chamada "yield curve" ou curva de rendimentos, descreve a relação entre as taxas de juro cupão zero[2] e o correspondente prazo até à maturidade. Entre outros usos, a EPTJ fornece informação importante necessária na avaliação de activos financeiros e derivados, na gestão de riscos financeiros, etc.

O objectivo deste estudo é avaliar a capacidade de previsão de diferentes modelos da EPTJ. Estamos, em primeiro lugar, interessados em modelizar a dinâmica temporal da EPTJ de maneira a podermos simular diferentes trajectórias aleatórias que as taxas de juro podem seguir, para depois analisarmos a sua distribuição probabilística calculando diferentes estatísticas descritivas dessa distribuição. Numa agência de gestão da dívida pública, isto pode ser útil para calcular medidas de risco como o "cost-at-risk[3]" ou para determinar a composição óptima do portfolio benchmark.

A primeira dificuldade que enfrentamos na prossecução daquele objectivo é que a EPTJ, que é uma função contínua do prazo até à maturidade, não é directamente observável porque não são negociados instrumentos cupão zero para todo o espectro de maturidades.

Na realidade, mesmo em mercados de divida pública líquidos, apenas alguns pontos da EPTJ são observáveis. Por esta razão, se precisarmos de uma taxa de juro para uma maturidade para a qual nenhum instrumento é negociado, um modelo da EPTJ terá ser estimado. Esta necessidade fez desenvolver uma enorme linha de investigação com o objectivo de alcançar a melhor representação

---

[2] Identificamos a EPTJ com a relação, num determinado momento do tempo, entre as taxas de rendimento dos instrumentos de cupão zero sem risco e as correspondentes maturidades disponíveis. O conceito de "yield curve" é mais abrangente e pode referir-se a taxas cupão zero ou não, e as "yields" podem ser calculadas com base em activos com idêntico, mas não necessariamente o mínimo, risco de crédito. Esta definição implica que a "yield curve" inclui a curva cupão zero sem risco, ou EPTJ, como um caso particular.

[3] "Cost-at-risk" indica, com uma dada probabilidade (normalmente 95%), o custo orçamental máximo da dívida pública, num dado período.

possível de toda a EPTJ apenas a partir dos poucos pontos directamente disponíveis a partir de preços de mercado.

Apesar dos avanços recentes na modelização da EPTJ, apenas na última década se concentraram esforços na previsão da sua dinâmica ou evolução ao longo do tempo. Até então, as preocupações centraram-se principalmente no ajustamento da forma da EPTJ, em *cross-section*, em determinados momentos do tempo.

Actualmente, sabe-se que um pequeno número de factores é suficiente para resumir quase toda a informação contida nas *yields* de diferentes maturidades ou nos preços de bilhetes e obrigações do tesouro. Por esta razão, normalmente os modelos da EPTJ são estruturas compostas por um pequeno número de factores e os correspondentes pesos ou ponderações relacionando as *yields* de diferentes maturidades com aqueles factores.

De todas as diferentes metodologias usadas na literatura, neste estudo, aplicaremos apenas a metodologia de Nelson e Siegel (1987) (N&S) e a análise de componentes principais (ACP), ambas integrando a sugestão preconizada por Diebold e Li (2006).

A primeira abordagem que é muito popular entre os participantes no mercado e bancos centrais, baseia-se no ajustamento da curva de Nelson e Siegel (1987) a dados em *cross-section*, seguida da modelização dinâmica das séries temporais dos coeficientes estimados, como propuseram Diebold e Li (2006). Na verdade, esta representação é um modelo dinâmico a três factores relacionados com o nível, inclinação e curvatura da EPTJ.

A abordagem de N&S impõe uma restrição sobre os pesos dos factores aplicando-lhes uma estrutura paramétrica pré-definida de acordo com a equação característica desta metodologia, restringindo o número de formas admissíveis que a EPTJ pode tomar. Ainda que pareçam restritivas, as condições impostas sobre os pesos dos factores têm o único propósito de manter aderência a hipóteses fundamentais como as taxas de juro serem positivas e os factores de desconto tenderem para zero com a maturidade. Estes são aspectos importantes na previsão da EPTJ, mas não estão garantidos na metodologia ACP.

Na ACP, os factores e os correspondentes pesos são estimados conjuntamente impondo apenas a restrição de que os factores sejam ortogonais (isto é, não apresentam correlação entre eles) sem que nenhuma condição seja imposta sobre os pesos dos factores. Isto difere da abordagem de N&S em que os factores pode estar correlacionados mas os pesos são pré-determinados. Em resultado da ACP, apenas três factores são normalmente capazes de explicar entre 95 a 99% da variância da EPTJ. Além disso, as três componentes principais podem ser interpretadas como nível, inclinação e curvatura porque estão relacionadas com a taxa de juro de longo prazo, o *spread* entre taxas de curto e longo prazos, e uma taxa de médio prazo menos uma média de taxas de curto e longo prazos, respectivamente.

Ainda que diferentes na sua formulação, as estimações e simulações através das duas metodologias dão resultados semelhantes, sugerindo que estão fortemente relacionadas. Neste estudo, comparam-se as

suas capacidades de previsão "*out-of-sample*" da EPTJ. A nossa abordagem é analisar em que medida as trajectórias simuladas para as taxas de juro estão próximas das características de distribuição histórica. Considerou-se relevante comparar as taxas de juro, *spreads* entre diferentes maturidade e medidas da curvatura em diferentes partes da EPTJ.

Este artigo está organizado em duas partes. Na primeira parte, serão caracterizadas as duas metodologias em estudo. A segunda parte apresenta os resultados da estimação e simulações com ambas as metodologias.

Parte I: Análise Teórica

A secção seguinte estabelece a notação usada no resto do texto. Na secção 3, tenta-se fazer uma classificação não exaustiva dos modelos da EPTJ em diferentes categorias, com o objectivo de diferenciar as metodologias ACP e N&S de abordagens alternativas na modelização da EPTJ. As secções 4 e 5 descrevem em detalhe as abordagens ACP e N&S e os correspondentes métodos de estimação.

2. Factores de Desconto, Taxas Forward e Taxas Spot

Factores de desconto, taxas *forward* e *spot* são representações equivalentes da EPTJ pelo que é importante definir a notação que será usada em diante.

Seja $y_t(\tau)$ a taxa *spot* cupão zero continuamente composta, no momento t, para a maturidade τ. Então:

- O correspondente factor de desconto será igual a $P_t(\tau) = e^{-y_t(\tau).\tau}$; toma o valor 1 para a maturidade zero e tende assintoticamente para zero quando a maturidade tende para infinito.
- A taxa *forward* instantânea será igual a $f(\tau) = -\frac{1}{P_t(\tau)}\frac{dP_t(\tau)}{d\tau}$;
- A taxa *spot*, em função da taxa *forward*, será dada por $y_t(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f_t(u)du$.

3. Uma Classificação Não Exaustiva dos Modelos

Na teoria moderna, as duas grandes classes habitualmente usadas para sistematizar os modelos da EPTJ são os modelos de equilíbrio ou fundamentais e os modelos de não-arbitragem, que também são conhecidos por modelos em forma reduzida. Os modelos considerados neste estudo pertencem a outra

classe de modelos designados por modelos empíricos ou estatísticos. Esta classificação pretende sobretudo enfatizar as diferenças entre as abordagens de N&S e ACP, e os modelos mais tradicionais. Uma sistematização mais completa dos modelos está fora do âmbito deste artigo.

3.1. Modelos de Equilíbrio

Nos modelos de equilíbrio, a EPTJ é derivada teoricamente, assumindo a maximização da utilidade do consumidor e, algumas vezes, funções de produção. A dinâmica temporal das taxas de juro instantâneas, dada por estes modelos segue uma equação diferencial estocástica. As taxas de juro de outras maturidades são obtidas assumindo um modelo afim da estrutura de prazo e algumas hipóteses acerca do preço de mercado do risco. Por essa razão, estes modelos de alguma forma descuram o ajustamento em cross-section da EPTJ e mostram uma capacidade de previsão limitada. Os modelos de Vasicek (1977) e Cox, Ingersoll e Ross (1985) incluem-se nesta classe de modelos. Duffie e Kan (1996) desenvolveram uma generalização multifactorial destes modelos.

3.2. Modelos de Não-Arbitragem

Alternativamente, os modelos de não-arbitragem (como o de Hull e White, 1990 e Heath, Jarrow e Morton, 1987) foram desenhados para serem perfeitamente consistentes com a EPTJ actual, assumindo uma representação funcional numericamente tratável da EPTJ. Os modelos de não-arbitragem são estimados sob a condição de que a evolução dinâmica das taxas de juro é consistente ao longo do tempo com a forma da EPTJ em qualquer momento do tempo, de maneira a eliminar qualquer oportunidade de arbitragem. Apesar de os modelos de não-arbitragem serem ferramentas flexíveis de modelização, falta-lhes motivação económica. Por outro lado, ainda que consigam um bom ajustamento da EPTJ aos dados de mercado em *cross-section*, não conseguem representar eficazmente a sua dinâmica temporal. Para obviar a este problema, alguma literatura sugere que a recalibração destes modelos seja feita com frequência.

Os restantes modelos podem ser agrupados numa terceira classe denominada de modelos empíricos ou estatísticos. Esta categoria inclui, por exemplo, os modelos *spline* baseados no ajustamento suave a troços de funções polinomiais; os modelos parcimoniosos (que incluem o modelo N&S) caracterizados por uma forma funcional com um reduzido número de parâmetros; e os modelos ACP que são o resultado da aplicação desta técnica estatística à EPTJ.

3.3. Modelos Empíricos

McCulloch (1971, 1975) preconizou o uso de funções matemáticas como polinómios para ajustar empiricamente a função de desconto em determinados momentos do tempo. Depois disso, várias funções foram sendo propostas para ajustar a EPTJ em factores de desconto, taxas de juro spot ou forward.

De acordo com a metodologia conhecida como “splines” cúbicas, se o espectro de maturidades for dividido em diferentes intervalos, a EPTJ pode ser representada por um polinómio do 3.º grau diferente em cada um desses intervalos. Podem aparecer problemas nos pontos de transição ou nós, isto é, onde se muda

de polinómio. Para garantir que a EPTJ é contínua e suave para todas as maturidades, os coeficientes dos polinómios em dois intervalos adjacentes são estimados sujeitos à restrição de, nos nós, as primeiras derivadas serem iguais e as segundas derivadas também, simultaneamente.

Esta metodologia é suficientemente flexível para ajustar EPTJ com formas complexas. Dado que é determinada pelas observações em cada grupo (e nos grupos contíguos), quantas mais partições se definirem melhor será o ajustamento às observações. No entanto, um sobre-ajustamento – em resultado da definição de demasiadas partições no espaço das maturidades – pode resultar em formas desapropriadas da EPTJ tais como as que implicam taxas de juro forward negativas. Para resolver este problema, Fisher et al. (1995, 1996) propuseram ajustar a EPTJ directamente em taxas forward em vez de taxas spot ou factores de desconto, e em vez de "splines de regressão", sugeriram usar "splines suaves" de maneira a evitar o sobre-ajustamento que produz formas estranhas da EPTJ.

Tendo em consideração a literatura, apesar de ser usada com sucesso para ajustar a EPTJ em *cross-section*, esta metodologia não é usada para prever ou simular a evolução futura da EPTJ. Parece haver algumas razões por detrás deste facto. Por um lado, a definição dos nós em cada momento do tempo é sempre uma tarefa subjectiva. Por outro lado, não é fácil interpretar os coeficientes estimados dos polinómios e modelizá-los em série temporal pode ser ainda mais complicado. Estas dificuldades, em conjunto, tornam inviável usar *splines* cúbicas para prever ou simular taxas de juro de uma forma efectiva.

A limitação mais importante dos modelos *spline* é o seu grande número de parâmetros a estimar. Esta é uma fraqueza considerável porque os participantes no mercado e os bancos centrais preferem ajustar funções parcimoniosas no número de parâmetros e fáceis de implementar. De acordo com o BIS (2005), nove dos treze bancos centrais abrangidos no seu estudo vinham usando a metodologia de Nelson e Siegel ou a extensão de Svensson (1994), que são funções da EPTJ com apenas quatro e cinco coeficientes, respectivamente.

Recentemente, este tipo de modelos recebeu um novo impulso com Diebold and Li (2006), que interpretam os coeficientes da função de Nelson e Siegel como factores latentes (como os que se obtêm através da ACP) e modelizam-nos como processos autoregressivos obtendo resultados promissores na previsão da EPTJ um período adiante. Na mesma linha de investigação, Diebold, Rudebusch e Aruoba (2005) e Diebold, Piazzesi and Rudebusch (2005) incorporam variáveis macroeconómicas relacionadas com os factores que ajudariam na previsão.

4. Análise de Componentes Principais

A análise de componentes principais (ACP) é uma técnica estatística para decompor um conjunto de variáveis correlacionadas em factores identificando padrões de comportamento comuns. Através de uma análise das relações entre as variáveis do sistema, a ACP tenta reproduzi-las com um número menor de variáveis, tirando partido da informação redundante. Noutras palavras, a ACP pretende reduzir a dimensionalidade do problema, com pouca perda de informação, tornando-a mais compreensível.

A ideia essencial da ACP é gerar um novo conjunto de variáveis que são combinação linear do conjunto inicial e explicam a maior parte da variância do conjunto original. As variáveis transformadas chamam-se componentes principais ou factores e são ortogonais entre elas. Isto significa que as únicas células não nulas da matriz de covariâncias são as variâncias na diagonal principal, com óbvias vantagens computacionais.

Desde que haja uma forte correlação entre as taxas de juro de diferentes maturidades, a ACP pode simplificar a EPTJ fazendo uso de apenas um pequeno número de factores independentes. Stock e Watson (1988), e Litterman e Scheinkman (1991) foram pioneiros na aplicação da ACP ao estudo da EPTJ. Usando dados para os Estados Unidos, o trabalho destes autores identifica três factores responsáveis por 98% da variância das taxas de juro. Aqueles factores são responsáveis por movimentos do nível, inclinação e curvatura da EPTJ.

4.1. Caracterização da Metodologia

As taxas de juro para diferentes maturidades estão altamente correlacionadas. Isto significa que existem apenas algumas poucas fonts de informação independentes partilhadas por todas as variáveis do sistema multivariado chamando EPTJ. A ACP é um método estatístico para extrair fontes de variação incorrelacionadas, tornando possível representar a informação de uma matriz $n \times k$ como uma combinação linear de k variáveis incorrelacionadas, chamadas factores ou componentes principais. A ACP calcula também a proporção da variância da matriz original que é explicada por cada componente principal.

A motivação da ACP é reduzir a dimensinalidade de maneira a que apenas as fontes de informação mais relevantes são consideradas através das m primeiras componentes principais, aquelas que explicam a parte mais importante da variância da EPTJ. Além disso, as componentes principais são ortogonais, logo a sua matriz de covariâncias é diagonal: apenas temos de calcular m variâncias em vez dos $k(k+1)/2$ elementos da matriz $k \times k$ das variâncias e covariâncias do sistema original.

A vantagem da ACP é a de que o sistema será uma função de apenas m variáveis em vez de k, o que simplifica tremendamente os cálculos e as fontes de incerteza, com pouca perda de precisão.

A ACP baseia-se na análise dos eigenvalues e eigenvectors de $\mathrm{V} = \mathrm{X'X/T}$, uma matriz $k \times k$ simétrica das correlações entre as variáveis de X. Cada componente principal é uma combinação linear das colunas de X, sendo os pesos $(w_{1m}, w_{2m}, \ldots, w_{km})$ seleccionados de forma a que:

- A primeira componente principal explica a maior parte da variância total de X; a segunda componente principal explica a maior parte da variância remanescente, e assim por diante.
- As componentes principais estão incorrelacionadas.

Isto pode ser alcançado seleccionando os pesos a partir dos eigenvectors da matriz de correlações.

Representando por W a matriz $k \times k$ de eigenvectors da matriz V, tem-se que:

$\mathrm{VW} = \mathrm{W}\Lambda$,

em que Λ é a matriz diagonal $k \times k$ dos eigenvalues de V. Se $\mathrm{W} = (w_{i,j})$ para $i, j = 1,\ldots,k$, então a coluna m-ésima de W, representada por $w_m = (w_{1m}, w_{2m},\ldots,w_{km})$ é o eigenvector $k \times 1$ associado ao eigenvalue λ_m.

Uma vez obtidos os eigenvectors da matriz de correlações, o passo seguinte é ordená-los de acordo com os eigenvalues, do maior para o mais pequeno. Isto dá-nos as componentes principais pela sua ordem de significância.

Se ordenarmos as colunas de W de forma crescente pelos eigenvalues associados $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k$, então a m-ésima componente principal é dada por:

$P_m = w_{1m}X_1 + w_{2m}X_2 + \ldots + w_{km}X_k = Xw_m$,

em que X_i representa a i-ésima coluna de X, i.e., os dados históricos da variável standardizada i. Cada componente principal é uma combinação linear das variáveis representadas no sistema. Em notação matricial, a matriz $T \times m$ de componentes principais que tem P_m na m-ésima coluna, pode ser representada por:

$\mathrm{P} = \mathrm{XW}$.

Devido à ordenação das colunas de W, as componentes principais assim obtidas estão também ordenadas, de maneira que P_1 está associado ao eigenvalue λ_1, P_2 a λ_2, etc. De acordo com a metodologia ACP, os eigenvalues são iguais à proporção da variância explicada por cada factor. A variância da primeira componente principal é igual ao máximo eigenvalue, a variância da segunda componente principal é igual ao segundo eigenvalue e assim por diante. Assim, a proporção da variância total que é explicada pela m-ésima componente principal é igual a $\lambda_m \Big/ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. Contudo, porque no caso de variáveis standardizadas, a soma dos eigenvalues é igual ao número de variáveis, a proporção da variância explicada pelas n primeiras componentes principais é igual a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i / k$.

Como $\mathrm{W}' = \mathrm{W}^{-1}$, então $\mathrm{X} = \mathrm{PW}'$, isto é,

$X_i = w_{i1}P_1 + w_{i2}P_2 + \ldots + w_{ik}P_k$.

Cada vector de dados pode ser descrito como uma combinação linear das componentes principais. Seriam necessaries todas as k componentes principais para explicar completamente a variância total do sistema. É costume considerar apenas as componentes principais mais significativas porque elas são suficientes parfa explicar a parte mais importante da variância com pouca perda de informação, tanto menor quanto mais pequenos os eigenvalues associados às componentes principais excluídas.

4.2. Algumas Considerações acerca da Standardização e Estacionaridade dos Dados

Devido ao facto da ACP não ser invariante à escala, os dados a serem usados devem ser standardizados (isto é, ter média zero e variância unitária) de maneira que as componentes principais não sejam dominadas pela variável com a maior variância[4]. Por essa razão, a ACP deve ser implementada com variáveis subtraídas da média e divididas pelo desvio padrão.

Outra consideração importante relaciona-se com as consequências da não estacionaridade dos dados na estimação das componentes principais. De acordo com Machado et al. (2001), ainda esta técnica tenha sido inicialmente desenvolvida sob a hipótese de estacionaridade, a ACP é também aplicável com variáveis não estacionárias. No que diz respeito à standardização, ela é adequada quando as variáveis originais são estacionárias. Contudo, quando as variáveis são integradas de ordem um e algumas das séries mostram forte tendência crescente ou decrescente, a standardização habitual deixa de ser aconselhável porque a variância deixa de ser uma boa medida da volatilidade.

A questão de se as taxas de juro podem ser caracterizadas como um processo de reversão à média ou de raíz unitária, isto é, como um processo estacionário ou não estacionário, é controverso na literatura. Se as taxas de juro contêm raízes unitárias, então os choques sobre as taxas de juro são permanentes e os seus efeitos persistirão ao longo do tempo. Por outro lado, se as taxas de juro podem ser caracterizadas como processos estacionários, então as inovações são transitórias e espera-se que sejam revertidas ao fim de algum tempo. Seguindo este raciocínio, e dado que as taxas de juro estão limitadas pelo valor zero e não devem tender para infinito, esperar-se-ia que os estudos empíricos levassem à conclusão de que as taxas de juro são estacionárias.

No entanto, os primeiros estudos sobre testes de raízes unitárias chegaram à conclusão de que a hipótese de raíz unitária não podia ser rejeitada e, em consequência, a hipótese de que as taxas de juro são não estacionárias foi dada como adquirida na investigação subsequente.

Mais recentemente, levantaram-se algumas dúvidas acerca da potência dos testes[5] de raízes unitárias sob certas circunstâncias. De acordo com a evidência mais recente, a incapacidade para rejeitar a hipótese de raíz unitária parece ser mais o resultado da falta de potência dos testes tradicionais do que evidência contra a estacionaridade das taxas de juro.

Por esta razão, uma análise da estacionaridade das taxas de juro nominais está fora do alcance deste artigo. No entanto, mesmo que a taxas de juro devam ser consideradas como não estacionárias, isto não deve impedir-nos de aplicar a standardização habitual porque a existência de tendências diferentes não parece ser relevante em taxas de juro de diferentes maturidades.

---

[4] É habitual standardizar previamente as séries originais para obter dados comparáveis se as variâncias das variáveis diferir muito, ou se a unidade de medida das variáveis for diferente. Caso contrário, podemos ter a ACP implementada de ambas as maneiras: se procedermos sem estandardizar estaremos a fazer uma ACP da matriz de covariâncias, enquanto uma ACP em variáveis standardizadas é uma ACP feita sobre a matriz de correlações.

[5] Os testes de raízes unitárias mais populares são o augmented Dickley e Fuller (ADF) e Phillips e Perron (PP).

4.3. Simulação Monte Carlo usando ACP

A ideia central é aplicar a técnica de simulação Monte Carlo para gerar a distribuição futura da EPTJ de acordo com a representação ACP. Para alcançar aquele objectivo, podemos modelizar o comportamento em série temporal dos factores e diferentes metodologias podem ser usadas. Referiremos apenas os processos random walk (RW), autoregressivo (AR) e vector autoregressivo (VAR).

Como foi mostrado na caracterização da metodologia ACP, por definição, temos:

$\mathrm{P} = \mathrm{XW}$,

em que P representa as components principais, X representa os dados originais estandardizados e W é a matriz de eigenvectors.

Como a matriz de eigenvectors é orthogonal, multiplicando ambos os membros da equação anterior por W', obtermos:

$\mathrm{PW}' = \mathrm{XWW}' = \mathrm{X}$ ou $\mathrm{X} = \mathrm{PW}'$.

Se $x_{1t}, x_{2t}, \ldots, x_{nt}$ representar as variações nas taxas de juro diárias estandardizadas para n maturidades diferentes e representando por $p_{1t}, p_{2t}, \ldots, p_{3t}$ os três factores, chegamos à seguinte notação matricial para representar as variações nas taxas de juro:

$x_{it} = w'_{1i}\, p_{1t} + w'_{2i}\, p_{2t} + w'_{3i}\, p_{3t} + \xi_{it}$ para $i = 1, \ldots, n$ em que ξ_{it} é o erro provocado por se considerarem apenas três factores no modelo e w'_{1i}, w'_{2i} e w'_{3i} são as sensibilidades de cada taxa de juro aos factores. Consideramos que as três componentes principais são os factores de risco e o resto da variância das taxas de juro é um ruído.

Para se possa modelizar a dinâmica de x_{it}, têm que ser analisadas as propriedades das séries temporais dos factores (p_{1t}, p_{2t}, p_{3t}). Consideraremos três modelos diferentes: um random walk, um processo auto-regressivo de ordem um, $AR(1)$, que se pode demonstrar exibir reversão à média, e um processo vector autoregressivo, $VAR(1)$, que além disso considera a interrelação entre os factores.

Depois de estimados os modelos, basta gerar números aleatórios de acordo com a distribuição normal e similar a dinâmica dos três factores (p_{1t}, p_{2t}, p_{3t}). No caso da ACP, porque a correlação entre p_{1t}, p_{2t}, p_{3t} é igual a zero, por construção, a simulação pode ser independente, i.e., $AR(1)$ e $VAR(1)$ deve levar aos mesmos resultados se os erros forem independentes.

Chama-se a atenção para o facto das taxas de juro que resultam das simulações estarem estandardizadas. Por essa razão, para voltar ao vector original, as taxas de juro estandardizadas devem ser multiplicadas pelo desvio padrão e somadas da média.

5. A abordagem de Nelson e Siegel

Nelson e Siegel (1987) (N&S) propuseram-se ajustar a EPTJ usando uma função suave e flexível capaz de representar, com um pequeno número de parâmetros – a razão pelo qual o incluímos na categoria dos modelos parcimoniosos – uma grande variedade de formas típicas que a EPTJ pode tomar ao longo do tempo. Mesmo sabendo que a função de Nelson e Siegel tem mais motivação empírica do que teórica, o seu uso generalizado pelos participantes no mercado e bancos centrais é prova irrefutável da sua popularidade.

Várias extensões a N&S, como a de Svensson (1994) e Bliss (1996), foram sendo propostas, por forma a ganhar flexibilidade na estimação e conseguir ajustar-se a formas mais complicadas da EPTJ. É óbvio que modelos com mais factores não podem ajustar-se pior do que modelos menos flexíveis, mas impõem um custo em termos de dificuldades adicionais na estimação.

Os parâmetros do modelo, que se assumem serem variáveis no tempo, são estimados para cada amostra em *cross-section* em intervalos de tempo regulares dependendo da frequência das observações. Na literatura, a frequência das observações situa-se normalmente entre diária e mensal. Como as variações nos parâmetros estão relacionadas com variações na forma da EPTJ, seguindo os resultados de Diebold e Li (2006), se aplicarmos métodos de estimação em série temporal para modelizar e simular os parâmetros, seremos também capazes de prever a evolução futura da EPTJ.

5.1. Nelson e Siegel (1987)

No modelo paramétrico proposto por Nelson e Siegel, a relação entre taxas de juro e maturidade é derivada a partir da hipótese de que as taxas de juro *spot* seguem uma equação diferencial de 2.ª ordem e que as taxas *forward*, sendo previsões das taxas *spot*, são a solução dessa equação com duas raízes reais idênticas.

As taxas *forward* instantâneas, no momento t e maturidade τ são representadas pela seguinte expansão exponencial:

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} e^{-\tau/\lambda_t} + \beta_{3,t}\, e^{-\tau/\lambda_t} \tau/\lambda_t \ .$$

Integrando entre 0 e τ, obtemos a função das taxas spot:

$$y_t(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} f_t(m)dm = \beta_{1,t} + \beta_{2,t}\left(\frac{1-e^{-\tau/\lambda_t}}{\tau/\lambda_t}\right) + \beta_{3,t}\left(\frac{1-e^{-\tau/\lambda_t}}{\tau/\lambda_t} - e^{-\tau/\lambda_t}\right)$$

em que τ representa a maturidade e $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$, $\beta_{3,t}$ e λ_t representam os quatro parâmetros a serem estimados.

Esta estrutura tem as características adequadas para capturar as formas usuais da EPTJ. Uma delas é a de que existem limites para as taxas de juro de muito longo e curto prazos. Tanto nas taxas de juro *spot* como *forward*, os parâmetros têm as seguintes interpretações. Para maturidades longas, as taxas de juro tendem assintoticamente para $\beta_{1,t}$ (i.e. a taxa de juro de muito longo prazo), $\beta_{1,t} + \beta_{2,t}$ é o valor inicial da curva (i.e., da taxa de juro instantânea) e o *spread* entre as taxas de longo e curto prazos é igual a $-\beta_{2,t}$ (i.e. a inclinação média). Os parâmetros $\beta_{3,t}$ e λ_t não têm interpretação económica directa mas determinam a forma como é feita a transição entre o curto e longo prazos e são responsáveis pela bossa que a EPTJ apresenta. A magnitude da bossa é determinada pelo valor $\beta_{3,t}$ enquanto a orientação da bossa é determinada pelo seu sinal: se $\beta_{3,t} < 0$ então a bossa apresentará a forma de um "U" e se $\beta_{3,t} > 0$, ela parecer-se-á com um "U" invertido. Se $\beta_{3,t}$ é aproximadamente zero, em vez de um máximo ou mínimo, a EPTJ será uma função monótona crescente ou decrescente dependendo de se $\beta_{2,t}$ é negativo ou positivo, respectivamente.

A velocidade a que as taxas de juro tendem para o seu valor de longo prazo é determinada pelo parâmetro de decaimento λ_t, que é igual à maturidade para a qual o peso associado ao factor $\beta_{3,t}$ na função das taxas *forward* é maximizado. Além disso, a taxa *forward* tem um valor extremo para $\tau = \left(1 - \frac{\beta_{2,t}}{\beta_{3,t}}\right)\lambda_t$. Quanto menor (maior) for λ_t, menor (maior) será a maturidade para a qual as taxas *forward* atingem o valor extremo e mais rápido (mais tarde) convergirão para o valor de longo prazo.

Dado que as taxas de juro têm de ser estritamente positivas, o modelo só fará sentido se as seguintes condições forem impostas:

$\beta_{1,t} > 0$

$\beta_{1,t} + \beta_{2,t} > 0$

$\lambda_t > 0$

As duas primeiras inequações garantem que os limites de curto e longo prazos da EPTJ são positivos enquanto a terceira inequação está de acordo com a existência de uma assíntota de longo prazo.

5.2. Extensões de Bliss (1996) e Svensson (1994) a Nelson e Siegel

Apesar do modelo de Nelson e Siegel ser capaz de reproduzir uma grande variedade de formas da EPTJ, funções matemáticas mais flexíveis têm sido propostas na literatura com o objectivo de ajustar ainda melhor às formas observadas no mercado. Detalhamos apenas as extensões a Nelson e Siegel propostas por Bliss (1996) e Svensson (1994).

O desenvolvimento proposto por Bliss (1996) é permitir que as componentes associadas à inclinação e curvatura dependam de parâmetros de decaimento diferentes: λ_{1t} e λ_{2t}. A correspondente função para a taxa *forward* é:

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} e^{-\tau/\lambda_{1t}} + \beta_{3,t}\, e^{-\tau/\lambda_{2t}} \tau/\lambda_{2t} \ ,$$

de forma que as curva das taxas *spot* será representada por:

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t}\left(\frac{1-e^{-\tau/\lambda_{1t}}}{\tau/\lambda_{1t}}\right) + \beta_{3,t}\left(\frac{1-e^{-\tau/\lambda_{2t}}}{\tau/\lambda_{2t}} - e^{-\tau/\lambda_{2t}}\right).$$

No caso de $\lambda_{1t} = \lambda_{2t}$, a curva de Bliss reduz-se à de Nelson e Siegel.

Svensson (1994) sugere a inclusão de um factor adicional com um parâmetro de decaimento independente para acrescentar uma segunda bossa que resultaria num melhor ajustamento à EPTJ existente. A curva das taxas *forward* resultante é:

$$f_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t} e^{-\tau/\lambda_{1t}} + \beta_{3,t}\, e^{-\tau/\lambda_{1t}} \tau/\lambda_{1t} + \beta_{4,t}\, e^{-\tau/\lambda_{2t}} \tau/\lambda_{2t} \ ,$$

e a curva das taxas *spot* associada é:

$$y_t(\tau) = \beta_{1,t} + \beta_{2,t}\left(\frac{1-e^{-\tau/\lambda_{1t}}}{\tau/\lambda_{1t}}\right) + \beta_{3,t}\left(\frac{1-e^{-\tau/\lambda_{1t}}}{\tau/\lambda_{1t}} - e^{-\tau/\lambda_{1t}}\right) + \beta_{4,t}\left(\frac{1-e^{-\tau/\lambda_{2t}}}{\tau/\lambda_{2t}} - e^{-\tau/\lambda_{2t}}\right).$$

Quando $\beta_{4t} = 0$, a curva de Svensson reduz-se à de Nelson e Siegel.

Quando $\lambda_{1t} = \lambda_{2t}$, a curva de Svensson reduz-se à de Nelson e Siegel mas com um factor associado à curvatura igual a $\beta_{3,t} + \beta_{4,t}$, i.e., o efeito da curvatura é distribuído pelos dois parâmetros. Quando se chega a uma estimação em que $\lambda_{1t} \approx \lambda_{2t}$, surge um problema de multicolinearidade

5.3. Nelson e Siegel como um Modelo Dinâmico a 3 Factores

Originalmente, o modelo de Nelson e Siegel foi desenhado para ajustar em cross-section toda a EPTJ numa abordagem estática, em momentos do tempo determinados. Recentemente, Diebold e Li (2006) adaptaram a estrutura de componentes exponenciais de Nelson e Siegel para modelizar a EPTJ como um modelo com 3 parâmetros evoluindo dinamicamente no tempo.

Diebold e Li mostram que Nelson e Siegel, reinterpretado à luz de um modelo dinâmico, apesar da sua estrutura simples, é capaz de representar as propriedades empíricas da EPTJ historicamente observadas e obtêm resultados encorajadores quando as previsões das taxas de juro são comparadas com as de modelos alternativos. Estes resultados abriram caminho para o estudo do comportamento das séries temporais dos factores bem como da sua relação com variáveis macroeconómicas relevantes. Estes trabalhos acrescentaram à abordagem de Nelson e Siegel um conteúdo económico de que carecia inicialmente.

Na fórmula original de Nelson e Siegel, o parâmetro λ_t é variável no tempo. No entanto, de acordo com Diebold e Li (2006), não há perda de generalidade quando se assume que λ_t é constante, $\lambda_t = \lambda$ porque este parâmetro apenas determina a maturidade para a qual o peso associado à curvatura é maximizado e não tem interpretação económica evidente. Quando fixamos λ, a equação característica de Nelson e Siegel é linear nos parâmetros e, por isso, pode ser simplesmente estimada por mínimos quadrados ordinários. Nos estudos empíricos há maneiras diferentes de fixar λ. A mais simples estabelece-o num valor arbitrário, normalmente entre 2 e 3 anos. Outra abordagem é defini-lo igual à media dos λ_t, variáveis no tempo, que foram estimados em *cross-section* ao longo de todo o período da amostra. No terceiro método, aquele que escolhemos seguir neste estudo, o λ constante é estimado conjuntamente com os outros parâmetros variáveis no tempo, dentro de toda a amostra, por mínimos quadrados não lineares.

As três componentes principais do modelo, i.e. $\left(1, \frac{1-e^{-\tau/\lambda_t}}{\tau/\lambda_t}, \frac{1-e^{-\tau/\lambda_t}}{\tau/\lambda_t} - e^{-\tau/\lambda_t}\right)$ podem ser interpretadas como os pesos de cada factor. Representando-os em função da maturidade, justificam-se algumas observações. O peso associado ao primeiro factor é constante e não depende da maturidade. O peso associado ao coeficiente $\beta_{2,t}$ é uma função decrescente de τ. O peso do terceiro coeficiente começa em zero para $\tau = 0$, aumenta para valores intermédio de τ, e diminui para zero para maturidades longas apresentando a forma de uma função côncava em τ. Estes resultados são idênticos aos obtidos com a ACP e validam a interpretação dos coeficientes $\beta_{1,t}$, $\beta_{2,t}$ e $\beta_{3,t}$ como factores latentes relacionados com o nível, inclinação e curvatura, respectivamente. Graficamente, podemos observar que um aumento em $\beta_{1,t}$ aumenta as taxas de juro de igual forma em todas as maturidades, um aumento em $\beta_{2,t}$, aumenta mais as taxas de curto prazo mais do que as de longo prazo e, em resultado de um aumento em $\beta_{3,t}$, as taxas de maturidades intermédias são incrementadas mais do que as taxas de curto e longo prazos.

A seguinte representação no espaço de estados pode abarcar todos os modelos dinâmicos do tipo de Nelson e Siegel:

$y_t = X_t \beta_t + \varepsilon_t$ (equação de medida)

$$\begin{bmatrix} y_t(\tau_1) \\ y_t(\tau_2) \\ \vdots \\ y_t(\tau_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-\tau_1\lambda}}{\tau_1\lambda} & \frac{1-e^{-\tau_1\lambda}}{\tau_1\lambda} - e^{-\tau_1\lambda} \\ 1 & \frac{1-e^{-\tau_2\lambda}}{\tau_2\lambda} & \frac{1-e^{-\tau_2\lambda}}{\tau_2\lambda} - e^{-\tau_2\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{1-e^{-\tau_2\lambda}}{\tau_2\lambda} & \frac{1-e^{-\tau_2\lambda}}{\tau_2\lambda} - e^{-\tau_2\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1,t} \\ \beta_{2,t} \\ \beta_{3,t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t(\tau_1) \\ \varepsilon_t(\tau_2) \\ \vdots \\ \varepsilon_t(\tau_N) \end{bmatrix}$$

$\beta_t = \mu + \Phi\beta_{t-1} + \upsilon_t$ (equação de estado ou previsão)

No caso de um processo $VAR(1)$:

$$\begin{bmatrix} \beta_{1,t} \\ \beta_{2,t} \\ \beta_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1,t-1} \\ \beta_{2,t-1} \\ \beta_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \upsilon_{1,t} \\ \upsilon_{2,t} \\ \upsilon_{3,t} \end{bmatrix}$$

No caso de um processo $AR(1)$:

$$\begin{bmatrix} \beta_{1,t} \\ \beta_{2,t} \\ \beta_{3,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1,t-1} \\ \beta_{2,t-1} \\ \beta_{3,t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \upsilon_{1,t} \\ \upsilon_{2,t} \\ \upsilon_{3,t} \end{bmatrix}$$

em que $\begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \upsilon_t \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0_{N\times 1} \\ 0_{K\times 1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \right)$

A equação de medida define o vector $(T \times N)$ das taxas de juro como a soma dos factores multiplicados pelos seus pesos, conforme definido pelo modelo, com um vector de erros distribuídos segundo uma normal e independentes entre maturidades. A variância do erro para cada maturidade $\sigma_t^2(\tau_i)$ com $i = 1,\ldots,N$ compõe a matriz diagonal H de dimensão $(N \times N)$. O vector β_t de dimensão $(K \times 1)$ representa os factores e X_t corresponde à matriz $(N \times K)$ dos pesos dos factores que será variável no tempo apenas se o parâmetro de decaimento for variável.

O vector μ tem dimensão $(K \times 1)$ e a matriz Φ tem dimensão $(K \times K)$, e será diagonal ou completa conforme especifiquemos um modelo $AR(1)$ ou $VAR(1)$, por esta ordem. No caso de um *random walk*, $\mu = 0$ e $\Phi = 1$. Os erros na equação de estado seguem uma distribuição normal com matriz de covariâncias Q de dimensão $(K \times K)$, que assumiremos ser completa.

A hipótese de que a matriz H é diagonal implica que os desvios face à EPTJ não estão correlacionados entre maturidades. Isto é comum na literatura e diminui o número de parâmetros a estimar.

A hipótese de uma matriz Q não restrita permite que os choques sobre os três factores (ou betas) estejam correlacionados ainda que de acordo com a metodologia ACP, não se espere que haja correlação entre os factores.

5.4. Métodos de Estimação

5.4.1 Estimação em Duas Etapas

Numa primeira etapa, as equações de medida são estimadas em amostras cross-section com frequência regular. Os estimadores para os parâmetros são obtidos para cada momento do tempo. Numa segunda etapa, a dinâmica temporal dos parâmetros é especificada e estimada como um processo $AR(1)$, $VAR(1)$ ou *random walk*.

Se assumirmos que o parâmetro de decaimento é constante, a equação de Nelson e Siegel torna-se linear e pode ser estimada, na primeira etapa, por mínimos quadrados ordinários. Contudo, a escolha do valor de λ não é óbvia e envolverá sempre algum grau de subjectividade.

A alternativa é estimar o parâmetro de decaimento conjuntamente com os outros parâmetros mas, nesse caso, a estimação terá de fazer uso dos métodos de mínimos quadrados não-lineares ou máxima-verosimilhança. Como é comum na literatura, na segunda etapa, a dinâmica do parâmetro de decaimento não é modelizada explicitamente, usando-se o estimador constante se tivermos estimado o modelo impondo um λ constante ou a média dos λ_t variáveis no tempo, se o deixámos variar.

No caso em que

No caso em que λ é constante, e o método de mínimos quadrados não lineares é usado, a função objectivo a minimizar é a soma do quadrado dos desvios entre as taxas de juro observadas e estimadas:

$$Min_{\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\lambda\}}\sum_{t=1}^{T}\left[y_t(\tau)-\hat{y}_t(\tau)\right]^2 = Min_{\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\lambda\}}\sum_{t=1}^{T}\left[y_t(\tau)-\beta_{1t}-\beta_{2t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}\right)-\beta_{3t}\left(\frac{1-e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau}-e^{-\lambda\tau}\right)\right]^2$$

A equação anterior pode ser estimada usando a funcionalidade fminsearch do Matlab® que usa o método simplex de Nelder e Mead (1965). Este é um método numérico de busca directa para minimizar uma função objectivo num espaço multidimensional, sem usar informação de derivadas que não existem para este problema.

5.4.2 Filtro de Kalman

Uma alternativa à estimação em duas etapas é estimar conjuntamente todos os parâmetros do modelo na formulação do espaço de estados por máxima verosimilhança através de um filtro de Kalman. A estimação simultânea de todos os parâmetros em apenas uma etapa tem vantagens em termos de inferência estatística sobre a estimação em duas etapas. Para percebermos isto, devemos tem em conta que a estimação dos parâmetros na segunda etapa não considera os erros da primeira etapa, enquanto que a estimação conjunta das equações de medida e estado, fá-lo.

A verosimilhança do sistema dado pelas equações de medida e previsão é função do conjunto de parâmetros $\Theta = (\lambda_1, \lambda_2, \beta_t, \mu, \Phi, H, Q)$:

$$L = \sum_{t=1}^{T}\left[-\frac{1}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\ln\left(\left|f_{t|t-1}\right|\right)-\frac{1}{2}\eta'_{t|t-1}f_{t|t-1}^{-1}\eta_{t|t-1}\right]$$

em que:

$\eta_{t|t-1} = y_t - y_{t|t-1}$ representa o vector $(N\times 1)$ dos erros de previsão;

$y_{t|t-1}$ representa o vector das previsões para as taxas de juro dada a informação disponível no momento $t-1$,

$f_{t|t-1} = E\left(\eta_{t|t-1}\eta'_{t|t-1}\right)$ corresponde à matriz de covariâncias dos erros de previsão.

Os parâmetros são estimados por máxima verosimilhança:

$$Max\left[-\frac{T}{2}\ln(2\pi\sigma_\varepsilon)-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{T}\left(\frac{Y_j-Y_j(\beta)}{\sigma_\varepsilon}\right)^2\right]$$

em que $\hat{\sigma}_\varepsilon=\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{T}\left[Y_j-Y_j(\beta)\right]^2}$.

O maior perigo na estimação de Nelson e Siegel através de um filtro de Kalman é o de obter estimadores que são óptimos locais e não globais, i.e. o risco de falsa convergência. Os algoritmos de optimização usados – mínimos quadrados não-lineares e máxima verosimilhança – são resolvidos com base em valores iniciais. Quanto maior a sensibilidade dos estimadores dos parâmetros aos valores iniciais usados, maior deverá ser a precaução a ter. Por esta razão, é conveniente usar uma grelha de valores iniciais e não apenas um. Se a solução não converge sempre para o mesmo valor, terá de se ter alguma ponderação na escolha do óptimo.

Não obstante, a interpretação dos parâmetros β_1 e β_2 dada antes sugere que devemos usar como valor inicial a taxa de juro para a maturidade mais longa e a diferença entre esta e a taxa de mais curto prazo, respectivamente. Uma vez que para β_3 e λ não há interpretação económica específica, vários valores iniciais devem ser usados. No caso do parâmetro λ, porque tem de ser positivo, é recomendado usar uma grelha de valores entre 1 e a maturidade mais longa nos dados. Os limites para os valores iniciais do parâmetro β_3 devem ser definidos com base em estimações preliminares[6].

Uma outra regra prática é usar os coeficientes estimados numa determinada data como valores iniciais da observação subsequente na amostra.

[6] Usando este método, Geyer e Mader (1999) permitem que os valores iniciais de β_3 variem entre –1 e +1.

Parte II: Análise Empírica

Esta parte do trabalho começa com uma descrição dos dados usados na análise empírica. Na secção 7, são apresentados os resultados das estimações por N&S e ACP. Munidos dos coeficientes estimados, a EPTJ é simulada de acordo com ambos os modelos. A secção 8 analisa a distribuição em probabilidade das taxas de juro, *spreads* entre maturidades e curvaturas medidas em diferentes pontos da EPTJ. Os dois modelos são comparados com as características observadas na amostra histórica. A secção 10 conclui o estudo dado algumas pistas para investigação futura.

6. Dados

Os dados a usar neste trabalho são as taxas EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate) e taxas swap. Dado que estamos interessados em modelizar taxas de juro sem risco deveríamos estar usando bilhetes e obrigações do Tesouro. Em alternativa, as primeiras podem ser convertidas nas segundas (e vice-versa) através da modelização apropriada dos *spreads* de crédito, que não faremos aqui. As taxas EURIBOR são por construção taxas cupão zero, as taxas swap serão convertidas adequadamente[7] em taxas cupão zero.

Há duas maneiras de prosseguir com a análise empírica. Uma é usando *yields*, outra é converter *yields* em preços e usá-los nas estimações. No entanto, a minimização da soma do quadrado dos erros em yields tem vantagens sobre os preços. Como o preços das obrigações de maturidades curtas é insensível às taxas de juro ($P_{t,\tau} = e^{-r\tau}$ tende para 1, quando τ tende para zero independentemente da taxa de juro r) e os mínimos quadrados ordinários dão mais peso aos erros maiores, a minimização dos erros em preços daria menos importância aos erros de curto prazo do que a minimização dos erros em taxas de juro. Por outro lado, as duas metodologias tem um desempenho semelhante no longo prazo.

Obtiveram-se da Reuters® as taxas EURIBOR diárias para as maturidades entre 1 mês e 1 ano, e taxas Swap para o Euro entre 2 anos e 10 anos, 15, 20, 25 e 30 ano. O conjunto de dados compreende 25 séries temporais, com 2212 observações, cobrindo o período de tempo entre 04/01/1999 e 23/08/2007. Num tratamento preliminar dos dados, as taxas de mercado foram convertidas em taxas continuamente compostas considerando as convenções do mercado, as datas valor e as maturidades consideradas. Calculou-se para cada observação, o prazo efectivo até à maturidade que foi guardado na base de dados. A Figura 1 ilustra os dados históricos da EPTJ usados neste estudo.

[7] Ver Galitz (1995), página 167, equações 9.9 e 9.10.

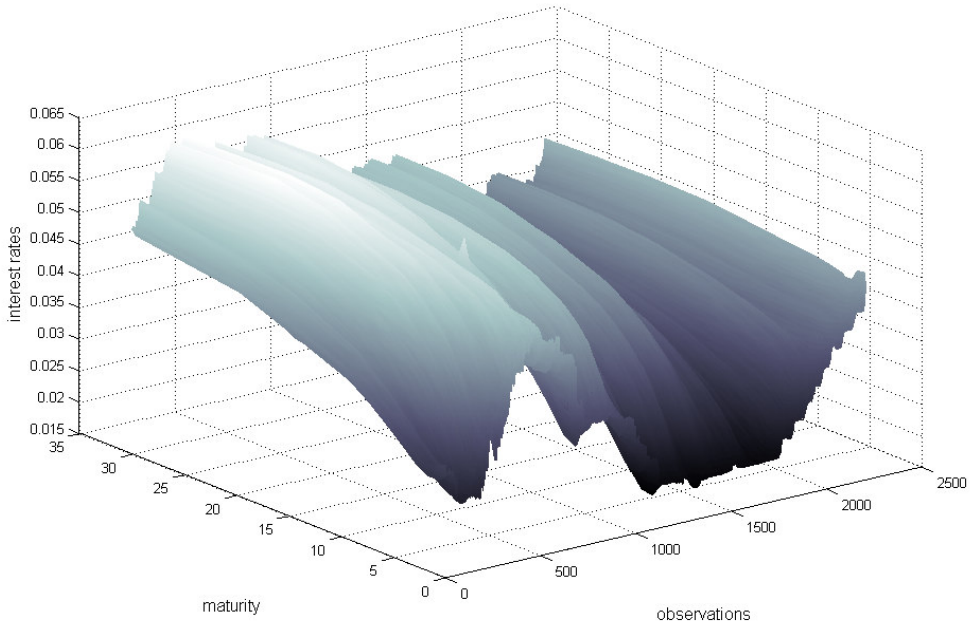

Figura 1: Estrutura da Prazo das Taxas de Juro no período entre 04/01/1999 e 23/08/2007

A figura 2 mostra a média, os percentis 5 e 95%, o desvio padrão e autocorrelação de ordem 1 para as taxas de juro (painel superior) e as mesmas estatísticas descritivas para as suas primeiras diferenças ou variações (painel inferior).

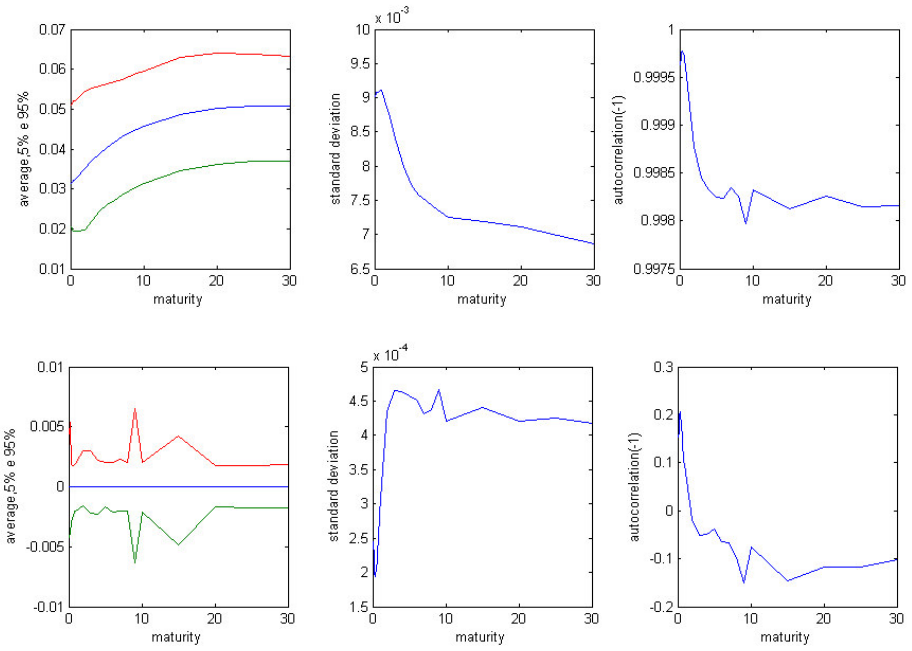

Figura 2: Taxas de Juro e Variações nas Taxas de Juro

A EPTJ média é positivamente inclinada e côncava. A volatilidade das taxas de juro diminui com a maturidade e as taxas de juro são persistentes ao contrário das primeiras diferenças que parecem estacionárias.

7. Resultados da Estimação

Neste estudo, λ (constante) foi estimado conjuntamente com os outros parâmetros (variáveis no tempo) através de mínimos quadrados não-lineares, partindo de uma bateria de diferentes valores iniciais. Todos eles convergiram para a mesma solução: 1,8825 anos.

Na figura 3, apresentamos a soma do quadrado dos erros nas estimações de Nelson e Siegel e da ACP com 3 factores, para o período coberto pela amostra. Quando se considera toda a amostra, a metodologia ACP é pelo menos tão boa como a de Nelson e Siegel, e para as últimas 500 observações (últimos dois anos), a ACP mostra um melhor ajustamento do que a função de Nelson e Siegel.

A figura 4 ilustra para determinadas datas, a EPTJ efectiva e estimada por N&S e ACP. Nas primeiras quatro observações, não há diferenças entre os dois métodos mas nas duas últimas, a ACP ajusta-se visivelmente melhor.

Quando consideradas em conjunto, as figuras 3 e 4 revelam alguma dificuldade de N&S capturar a forma da EPTJ no período mais recente, recomendando o uso de alguma extensão ao modelo de N&S. As funções de Bliss e Svensson conseguem um melhor ajustamento mas com o custo de uma sobreparametrização. Os algoritmos tornam-se dependentes dos valores iniciais e podem não convergir para uma única solução.

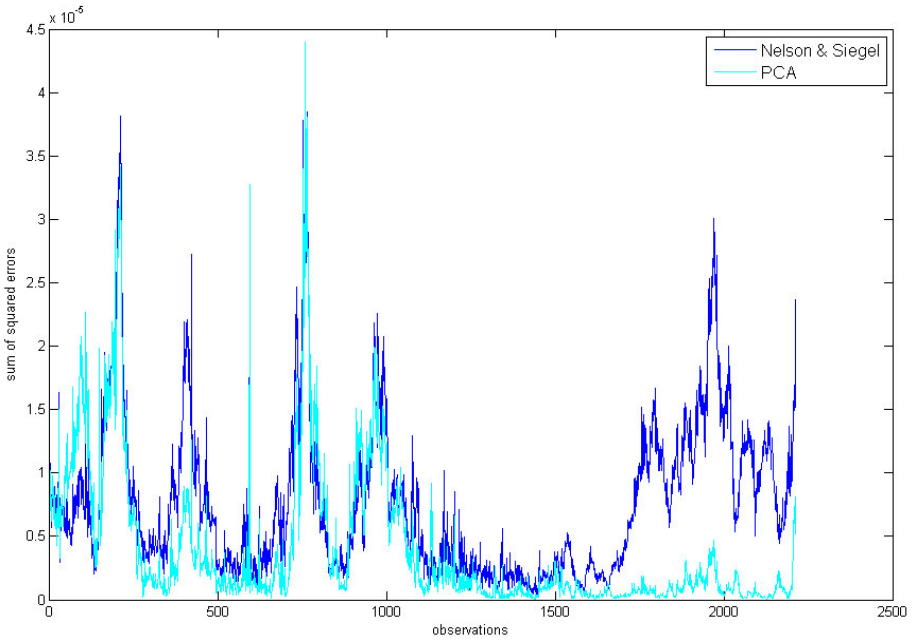

Figura 3: Soma do Quadrado dos Erros de N&S e ACP

A preferência por Nelson e Siegel (em detrimento das funções de Bliss e Svensson) prevalece na literatura e é consequência do facto de que, numa perspectiva de implementação prática, os mínimos quadrados ordinários são um método de estimação mais simples e não sofrem de problemas de convergência ou de valores iniciais que as estimações por mínimos quadrados não lineares ou máxima verosimilhança podem revelar. Por outro lado, a capacidade de explicação adicional de Bliss e Svensson será sempre marginal. Finalmente, um modelo mais simples mas mais intuitivo terá mais interesse do que um modelo mais complexo e com melhor ajustamento mas que carece de interpretação económica ou não está relacionado com variáveis económicas.

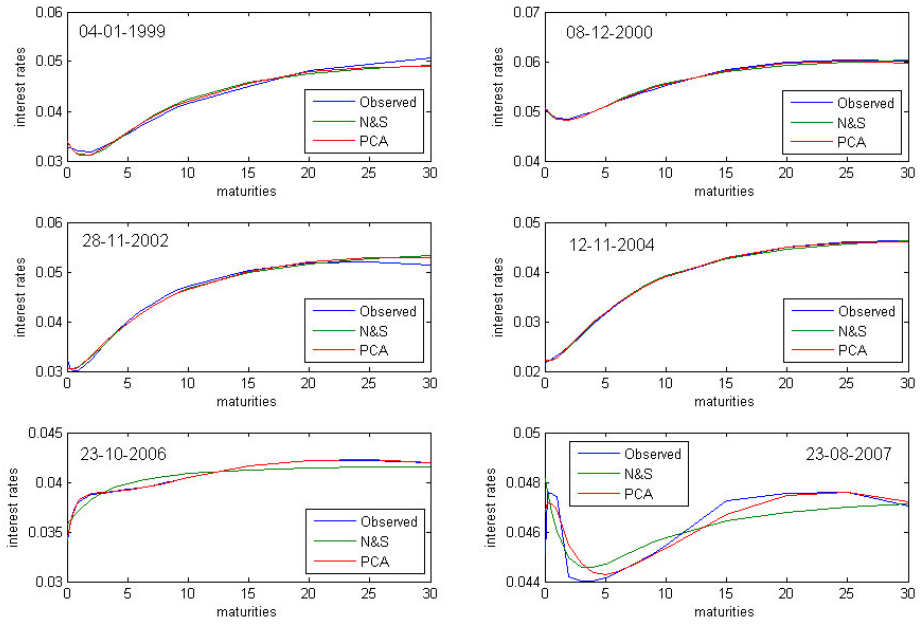

Figura 4: EPTJ Efectivas e Estimadas por N&S and ACP em determinadas datas

		Média	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	Min	Max	Matriz de Correlações			AR(-1)	AR(-20)	AR(-250)
Betas	1	0,05337	0,00764	-0,42154	1,92400	0,03743	0,06651	1,000	-0,451	-0,270	0,998	0,977	0,782
	2	-0,02174	0,00962	0,29614	2,12970	-0,03827	0,00082		1,000	0,491	0,998	0,971	0,276
	3	-0,01930	0,01526	-0,05083	1,72700	-0,05517	0,00814			1,000	0,996	0,922	-0,172
Factores	1	0,00000	4,61760	0,32666	2,00680	-7,61120	9,64240	1,000	0,000	0,000	0,999	0,983	0,541
	2	0,00000	1,79540	-0,28702	2,32930	-4,08710	3,78740		1,000	0,000	0,997	0,960	0,347
	3	0,00000	0,63900	0,52234	2,21180	-1,32510	1,62510			1,000	0,994	0,898	-0,438
Δ Betas	1	-0,00000	0,00045	0,18884	4,49690	-0,00205	0,00252	1,000	-0,897	-0,041	-0,128	-0,014	-0,008
	2	0,00000	0,00058	-0,34664	6,11960	-0,00384	0,00350		1,000	-0,188	-0,155	-0,008	-0,026
	3	0,00001	0,00135	0,43863	5,72430	-0,00529	0,00685			1,000	0,018	-0,013	0,004
Δ Factores	1	0,00259	0,15199	0,29763	4,53510	-0,79995	0,70595	1,000	0,668	-0,604	0,120	-0,014	-0,009
	2	-0,00131	0,13598	0,33473	4,70770	-0,65357	0,75876		1,000	-0,474	-0,161	-0,013	-0,024
	3	-0,00023	0,06713	-0,61693	6,44750	-0,43160	0,26100			1,000	-0,026	-0,010	-0,006

Tabela 1: Estatísticas Descritivas dos Betas (de N&S) e Factores (de ACP)

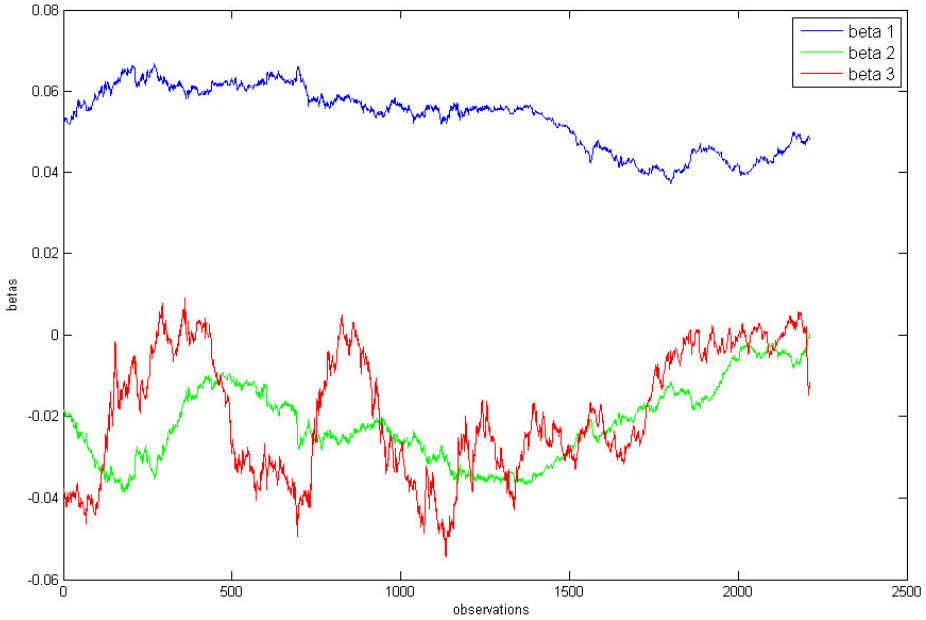

Figura 5: Betas de N&S

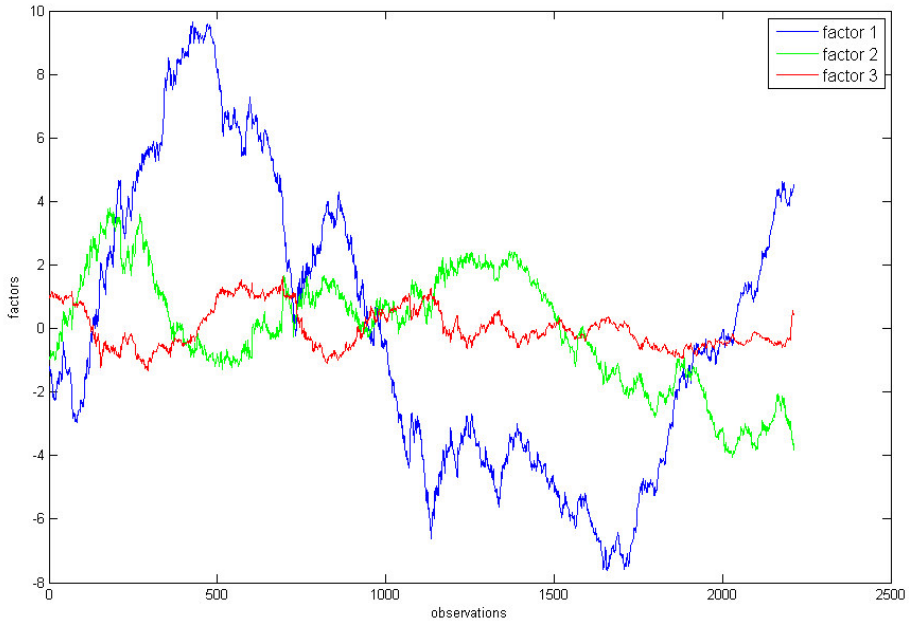

Figura 6: Factores de ACP (Componentes Principais)

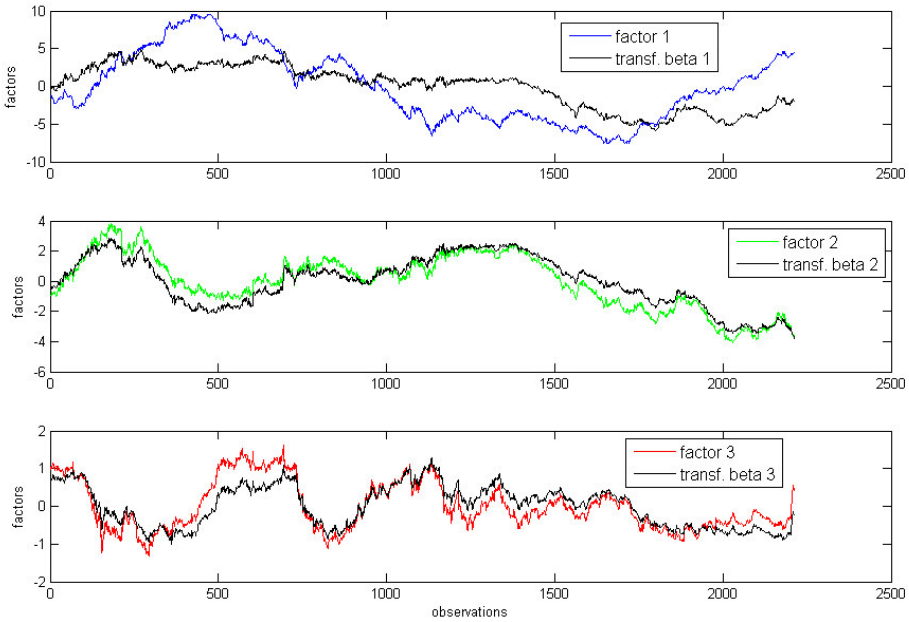

Figura 7: Factores de ACP e transformações lineares dos betas de N&S

Na figura 5, os coeficientes beta da função de Nelson e Siegel são apresentados para todo o período em estudo. O coeficiente beta 2 que é igual à diferença entre o curto e longo prazo é sempre negativo com excepção do período final. A EPTJ é positivamente inclinada mas os últimos 3 anos são marcados por uma contínua redução dos spreads entre o curto e longo prazos. Em face do comportamento de beta 3, podemos dizer que a curvatura foi quase sempre negativa e quando foi positiva mostrou valores reduzidos, isto é, a EPTJ foi quase sempre côncava e algumas vezes plana.

A figura 6 mostra os três factores da ACP ou componentes principais. Ainda que com diferentes escalas ou níveis, eles resumem a mesma informação dos betas de N&S, como é mostrado na figura 7. Quando os betas sofrem uma transformação linear (isto é, multiplicados por um escalar e uma constante é adicionada ao resultado), a dinâmica dos betas é comparável á dos factores.

Analisando os pesos associados aos betas e aos factores, conforme mostrado na figura 8, chegamos à conclusão de que a informação transmitida por ambas as metodologias é a mesma.

O primeiro factor ou beta 1 correspondem a deslocações paralelas da EPTJ. Choques sobre esse factor geram variações de igual sinal e amplitude em toda a EPTJ. O segundo factor e beta 2 são responsáveis por variações no gradiente da EPTJ porque choques neste factor provocam deslocações de sinal contrário nas extremidades da curva: curto e longo prazos. Finalmente, choques sobre o terceiro factor ou beta 3 têm efeitos sobre as extremidades da curva de sinal oposto ao do efeito provocado no médio prazo da curva.

O primeiro factor ou beta está associado ao nível da taxas de juro, o segundo e terceiro à inclinação e curvatura, respectivamente, ainda que com sinais contrários nas duas metodologias.

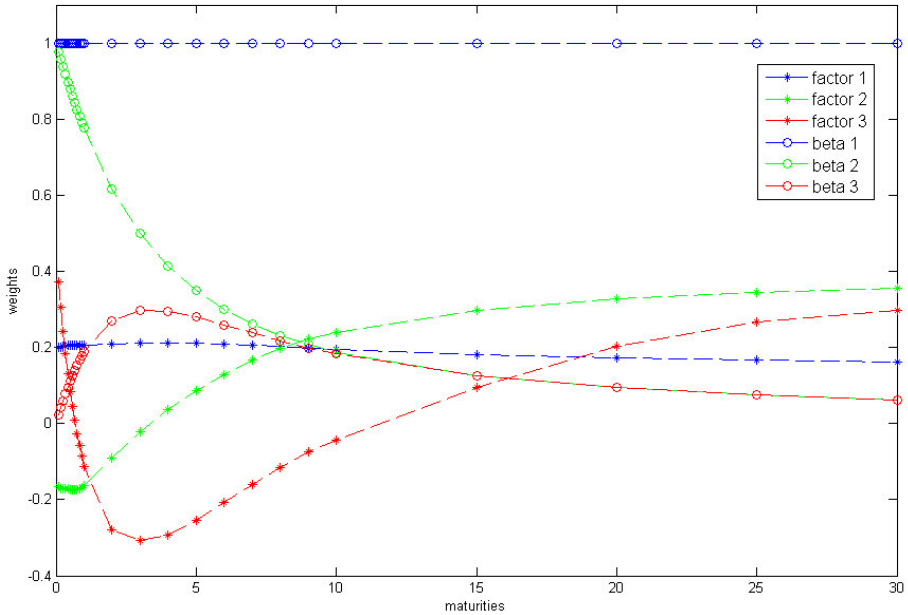

Figura 9: Pesos dos factores de ACP e pesos dos betas de N&S

Depois de termos estimado numa primeira etapa os factores na ACP e os betas em N&S, na segunda etapa eles foram modelizados em série temporal. A tabela 2 apresenta os resultados da estimação dos modelos $AR(1)$ e $VAR(1)$, que serão úteis na simulação da dinâmica da EPTJ de acordo com ambas as metodologias.

Considerando a fraca correlação entre os factores, o modelo $VAR(1)$ acrescenta pouco à capacidade explicativa do modelo $AR(1)$, como esperado. Contudo, usaremos o primeiro porque é ligeiramente mais rico em informação.

8. Resultados das Simulações

Nas tabelas 3, 4 e 5, apresentamos algumas estatísticas descritivas da distribuição das taxas de juro para diferentes maturidade, dos spreads entre taxas de juro de várias maturidades e algumas medidas da curvatura obtidas ao longo da EPTJ. As estatísticas seleccionadas são: a média, desvio padrão, coeficientes de assimetria e curtose, teste de Jarque-Bera à normalidade e a correspondente probabilidade, valores máximo e mínimo e os percentis de 5 e 95%.

Comparamos a distribuição histórica (o painel superior das tabelas) com a distribuição das taxas simuladas ao fim de 1 e 5 anos (painel do meio e inferior, respectivamente).

.

Não existem diferenças significativas nas simulações feitas através de ambos os métodos. Tipicamente, a EPTJ é positivamente inclinada e côncava e as taxas de juro de curto prazo são mais voláteis do que as longo prazo.

Os histogramas das taxas de juro, spreads e curvaturas simuladas pela metodologia N&S são apresentados na figura 9 (taxas de juro), 10 (spreads) e 11 (curvaturas). Como não há diferenças visíveis em relação aos resultados da metodologia ACP, não se apresentam os correspondentes histogramas.

Ao fim de um ano, as distribuições histórica e simuladas têm valores esperados e desvios padrão semelhantes. A principal diferença reside na forma (assimetria e curtose) da distribuição: enquanto a normalidade é rejeitada na taxas de juro, spreads e curvaturas históricas, o mesmo não é verdade para as distribuições simuladas. Uma das hipóteses centrais das simulações é de que as taxas de juro seguem uma distribuição normal, o que está longe de acontecer na realidade porque elas normalmente mostram assimetria positiva (estão limitadas pelo valor zero) e excesso de curtose. De facto, das 2500 simulações geradas, foi necessário eliminar 19 do método de N&S e 21 do método ACP, porque tomaram valores negativos em algum momento do tempo (nos 5 anos seguintes).

Este facto sugere que, se se pretende melhorar os modelos, a questão que se deve dar mais atenção é a não normalidade das taxas de juro, de forma a que coincidam com as distribuições empíricas.

Nelson e Siegel

		VAR(1)			AR(1)		
		Beta 1	Beta 2	Beta 3	Beta 1	Beta 2	Beta 3
Coeficientes	Beta 1	0,99922	0,00029	-0,00517	0,99838		
	Beta 2	0,00229	0,99523	-0,00676		0,99936	
	Beta 3	-0,00086	0,00543	0,99717			0,99577
	Const.	0,00007	-0,00001	0,00009	0,00008	-0,00001	-0,00007
t-estatísticos	Beta 1	708,9	0,2	-1,2	794,8		
	Beta 2	1,9	622,5	-1,8		770,2	
	Beta 3	-1,2	5,8	459,2			527,3
	Const.	1,1	-0,1	0,4	1,2	-0,2	-1,5
Probabilidades	Beta 1	0,00	0,87	0,22	0,00		
	Beta 2	0,06	0,00	0,07		0,00	
	Beta 3	0,23	0,00	0,00			0,00
	Const.	0,29	0,95	0,68	0,21	0,86	0,13
R^2		0,99652	0,99635	0,99213	0,99652	0,99629	0,99212

Análise de Componentes Principais

		VAR(1)			AR(1)		
		Factor 1	Factor 2	Factor 3	Factor 1	Factor 2	Factor 3
Coeficientes	Factor 1	0,99966	-0,00081	0,00078	0,99966		
	Factor 2	-0,00157	0,99811	-0,00112		0,99811	
	Factor 3	-0,02201	0,01853	0,99407			0,99407
	Const.	0,00259	-0,00131	-0,00023	0,00260	-0,00131	-0,00024
t-estatísticos	Factor 1	1433,2	-1,3	2,5	1427,5		
	Factor 2	-0,9	621,4	-1,4		619,1	
	Factor 3	-4,4	4,1	446,1			445,5
	Const.	0,8	-0,5	-0,2	0,8	-0,5	-0,2
Probabilidades	Factor 1	0,00	0,20	0,01	0,00		
	Factor 2	0,38	0,00	0,16		0,00	
	Factor 3	0,00	0,00	0,00			0,00
	Const.	0,42	0,65	0,87	0,42	0,65	0,87
R^2		0,99893	0,99432	0,98903	0,99892	0,99427	0,98899

Tabela 2: Resultados da Estimação dos modelos $AR(1)$ e $VAR(1)$)

Nelson e Siegel

	Maturidade	Média	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	JB	Prob	Min	Max	Perc.(5%)	Perc.(95%)
Histórica	'1M'	3,132%	0,90%	0,52	2,13	170,0	0,00%	2,042%	5,105%	2,101%	4,861%
	'1Y'	3,305%	0,91%	0,35	1,97	142,4	0,00%	1,937%	5,274%	2,157%	4,980%
	'5Y'	4,023%	0,77%	0,24	2,01	111,4	0,00%	2,596%	5,629%	2,858%	5,396%
	'10Y'	4,560%	0,72%	0,13	1,98	102,8	0,00%	3,122%	5,936%	3,408%	5,744%
	'15Y'	4,852%	0,72%	0,03	1,94	104,3	0,00%	3,428%	6,288%	3,687%	5,944%
	'30Y'	5,048%	0,68%	-0,17	1,93	116,9	0,00%	3,695%	6,313%	3,928%	6,013%
Ao fim de 1 ano	'1M'	3,793%	0,70%	-0,03	2,97	0,4	83,39%	1,346%	5,980%	2,620%	4,951%
	'1Y'	3,691%	0,72%	-0,06	3,03	1,3	51,09%	1,260%	6,175%	2,476%	4,871%
	'5Y'	4,192%	0,64%	-0,08	3,04	3,1	21,27%	1,889%	6,617%	3,113%	5,225%
	'10Y'	4,749%	0,53%	-0,05	2,99	0,9	62,95%	2,849%	6,680%	3,867%	5,604%
	'15Y'	5,018%	0,49%	0,00	2,96	0,2	88,86%	3,201%	6,688%	4,192%	5,830%
	'30Y'	5,301%	0,49%	0,04	2,93	1,2	56,13%	3,579%	6,846%	4,495%	6,137%
Ao fim de 5 anos	'1M'	3,442%	0,96%	-0,07	2,99	2,2	33,14%	0,079%	6,475%	1,825%	4,994%
	'1Y'	3,512%	0,90%	-0,04	2,94	1,2	53,71%	0,578%	6,469%	2,003%	4,985%
	'5Y'	4,189%	0,76%	-0,01	2,90	1,1	58,12%	1,848%	6,799%	2,948%	5,415%
	'10Y'	4,719%	0,69%	-0,03	2,96	0,7	72,07%	2,439%	7,139%	3,551%	5,805%
	'15Y'	4,963%	0,69%	-0,04	2,98	0,7	70,18%	2,632%	7,356%	3,812%	6,054%
	'30Y'	5,218%	0,71%	-0,04	3,01	0,7	71,73%	2,786%	7,579%	4,030%	6,367%

Análise de Componentes Principais

	Maturidade	Média	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	JB	Prob	Min	Max	Perc.(5%)	Perc.(95%)
Histórica	'1M'	3,132%	0,90%	0,52	2,13	170,0	0,00%	2,042%	5,105%	2,101%	4,861%
	'1Y'	3,305%	0,91%	0,35	1,97	142,4	0,00%	1,937%	5,274%	2,157%	4,980%
	'5Y'	4,023%	0,77%	0,24	2,01	111,4	0,00%	2,596%	5,629%	2,858%	5,396%
	'10Y'	4,560%	0,72%	0,13	1,98	102,8	0,00%	3,122%	5,936%	3,408%	5,744%
	'15Y'	4,852%	0,72%	0,03	1,94	104,3	0,00%	3,428%	6,288%	3,687%	5,944%
	'30Y'	5,048%	0,68%	-0,17	1,93	116,9	0,00%	3,695%	6,313%	3,928%	6,013%
Ao fim de 1 ano	'1M'	3,806%	0,65%	-0,02	2,87	1,9	37,93%	1,779%	6,219%	2,707%	4,878%
	'1Y'	3,710%	0,74%	-0,05	2,80	5,6	6,01%	1,384%	6,190%	2,456%	4,938%
	'5Y'	4,176%	0,62%	-0,09	2,79	8,1	1,76%	2,191%	6,129%	3,150%	5,164%
	'10Y'	4,709%	0,53%	-0,09	2,89	5,0	8,20%	2,954%	6,420%	3,835%	5,553%
	'15Y'	5,017%	0,50%	-0,09	2,93	4,2	12,51%	3,415%	6,668%	4,193%	5,812%
	'30Y'	5,240%	0,45%	-0,09	2,96	3,9	14,57%	3,780%	6,689%	4,465%	5,977%
Ao fim de 5 anos	'1M'	3,403%	0,94%	-0,08	2,79	7,2	2,74%	0,281%	6,478%	1,814%	4,945%
	'1Y'	3,529%	0,92%	-0,09	2,81	7,2	2,77%	0,166%	6,348%	2,005%	5,036%
	'5Y'	4,180%	0,75%	-0,08	2,99	2,6	27,21%	0,947%	6,739%	2,915%	5,421%
	'10Y'	4,699%	0,71%	-0,05	3,09	2,0	35,96%	1,977%	7,147%	3,502%	5,906%
	'15Y'	4,986%	0,71%	-0,04	3,12	2,0	37,51%	2,555%	7,462%	3,800%	6,181%
	'30Y'	5,172%	0,68%	-0,01	3,13	1,7	42,77%	2,802%	7,503%	4,042%	6,292%

Tabela 3: Resultados da Simulação para N&S e ACP – estatísticas descritivas das taxas de juro

Nelson e Siegel

	Spread	Média	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	JB	Prob	Min	Max	Perc.(5%)	Perc.(95%)
Histórica	5Y-1Y	0,718%	0,42%	-0,13	1,98	101,8	0,00%	-0,344%	1,594%	0,016%	1,335%
	10Y-1Y	1,255%	0,62%	-0,37	2,07	131,1	0,00%	-0,209%	2,335%	0,110%	2,109%
	15Y-1Y	1,547%	0,72%	-0,39	2,12	128,4	0,00%	-0,048%	2,776%	0,207%	2,523%
	5Y-1M	0,891%	0,53%	0,23	2,55	38,4	0,00%	-0,254%	2,382%	0,024%	1,798%
	10Y-1M	1,428%	0,65%	0,09	2,27	52,3	0,00%	0,025%	3,008%	0,398%	2,431%
	15Y-1M	1,720%	0,72%	0,01	2,24	53,7	0,00%	0,186%	3,394%	0,566%	2,779%
Ao fim de 1 ano	5Y-1Y	0,500%	0,33%	-0,02	2,97	101,8	0,00%	-0,759%	1,506%	-0,043%	1,029%
	10Y-1Y	1,058%	0,51%	-0,07	2,96	131,1	0,00%	-0,745%	2,695%	0,196%	1,884%
	15Y-1Y	1,326%	0,61%	-0,07	2,97	128,4	0,00%	-0,693%	3,311%	0,301%	2,314%
	5Y-1M	0,399%	0,49%	0,04	3,00	38,4	0,00%	-1,402%	2,002%	-0,396%	1,215%
	10Y-1M	0,957%	0,61%	-0,02	2,96	52,3	0,00%	-1,388%	2,827%	-0,061%	1,941%
	15Y-1M	1,225%	0,68%	-0,04	2,96	53,7	0,00%	-1,336%	3,268%	0,108%	2,326%
Ao fim de 5 anos	5Y-1Y	0,676%	0,41%	0,03	2,93	0,8	66,47%	-0,606%	2,211%	0,007%	1,346%
	10Y-1Y	1,207%	0,62%	0,05	2,95	0,9	63,02%	-0,791%	3,330%	0,198%	2,221%
	15Y-1Y	1,451%	0,73%	0,06	2,96	1,0	59,73%	-0,978%	3,832%	0,260%	2,642%
	5Y-1M	0,746%	0,61%	0,01	2,94	1,1	56,63%	-1,257%	3,009%	-0,253%	1,733%
	10Y-1M	1,277%	0,76%	0,03	2,93	1,2	53,75%	-1,115%	4,128%	0,027%	2,526%
	15Y-1M	1,520%	0,84%	0,04	2,93	1,3	51,09%	-1,120%	4,595%	0,152%	2,882%

Análise de Componentes Principais

	Spread	Média	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	JB	Prob	Min	Max	Perc.(5%)	Perc.(95%)
Histórica	5Y-1Y	0,718%	0,42%	-0,13	1,98	101,8	0,00%	-0,344%	1,594%	0,016%	1,335%
	10Y-1Y	1,255%	0,62%	-0,37	2,07	131,1	0,00%	-0,209%	2,335%	0,110%	2,109%
	15Y-1Y	1,547%	0,72%	-0,39	2,12	128,4	0,00%	-0,048%	2,776%	0,207%	2,523%
	5Y-1M	0,891%	0,53%	0,23	2,55	38,4	0,00%	-0,254%	2,382%	0,024%	1,798%
	10Y-1M	1,428%	0,65%	0,09	2,27	52,3	0,00%	0,025%	3,008%	0,398%	2,431%
	15Y-1M	1,720%	0,72%	0,01	2,24	53,7	0,00%	0,186%	3,394%	0,566%	2,779%
Ao fim de 1 ano	5Y-1Y	0,466%	0,35%	-0,10	2,98	101,8	0,00%	-0,916%	1,580%	-0,126%	1,043%
	10Y-1Y	0,999%	0,54%	-0,08	2,93	131,1	0,00%	-1,036%	2,614%	0,098%	1,881%
	15Y-1Y	1,307%	0,62%	-0,07	2,92	128,4	0,00%	-0,985%	3,117%	0,267%	2,320%
	5Y-1M	0,371%	0,45%	-0,11	3,09	38,4	0,00%	-1,253%	1,747%	-0,362%	1,101%
	10Y-1M	0,904%	0,56%	-0,11	3,04	52,3	0,00%	-1,228%	2,687%	-0,032%	1,821%
	15Y-1M	1,211%	0,61%	-0,10	3,01	53,7	0,00%	-1,177%	3,191%	0,184%	2,234%
Ao fim de 5 anos	5Y-1Y	0,650%	0,45%	0,01	2,91	4,3	11,55%	-0,863%	2,171%	-0,089%	1,401%
	10Y-1Y	1,170%	0,67%	0,02	2,91	4,6	10,08%	-1,260%	3,239%	0,080%	2,296%
	15Y-1Y	1,457%	0,76%	0,03	2,90	4,9	8,74%	-1,367%	3,861%	0,241%	2,753%
	5Y-1M	0,777%	0,59%	-0,02	2,91	5,1	7,72%	-1,061%	2,967%	-0,203%	1,723%
	10Y-1M	1,297%	0,73%	0,00	2,90	5,4	6,80%	-0,998%	3,925%	0,083%	2,516%
	15Y-1M	1,583%	0,80%	0,01	2,90	5,6	6,01%	-0,940%	4,337%	0,283%	2,904%

Tabela 4: Resultados da Simulação para N&S e ACP – estatísticas descritivas dos spreads

	Nelson e Siegel										
	Curvatura	Média	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	JB	Prob	Min	Max	Perc.(5%)	Perc.(95%)
Histórica	2*5Y-(1Y+10Y)	0,182%	0,28%	0,27	2,07	106,1	0,00%	-0,523%	0,870%	-0,209%	0,649%
	2*10Y-(5Y+15Y)	0,245%	0,14%	-0,41	2,07	142,7	0,00%	-0,160%	0,760%	-0,007%	0,431%
	2*15Y-(10Y+20Y)	0,137%	0,07%	-1,05	18,63	22859,0	0,00%	-0,731%	0,488%	0,041%	0,234%
	2*5Y-(1M+10Y)	0,355%	0,50%	-0,01	2,51	22,3	0,00%	-0,803%	1,763%	-0,487%	1,161%
	2*10Y-(1M+20Y)	0,981%	0,60%	0,22	2,50	41,5	0,00%	-0,264%	2,593%	0,013%	2,031%
	2*15Y-(1M+30Y)	1,524%	0,68%	0,21	2,48	40,9	0,00%	0,195%	3,356%	0,485%	2,579%
Ao fim de 1 ano	2*5Y-(1Y+10Y)	-0,058%	0,25%	0,06	3,05	1,8	41,41%	-0,840%	0,832%	-0,461%	0,353%
	2*10Y-(5Y+15Y)	0,290%	0,12%	-0,07	2,97	2,4	30,73%	-0,127%	0,692%	0,081%	0,492%
	2*15Y-(10Y+20Y)	0,127%	0,05%	-0,06	2,97	1,5	47,50%	-0,059%	0,298%	0,037%	0,214%
	2*5Y-(1M+10Y)	-0,159%	0,47%	0,06	3,05	1,7	42,58%	-1,617%	1,477%	-0,906%	0,601%
	2*10Y-(1M+20Y)	0,548%	0,53%	0,03	2,99	0,3	85,37%	-1,470%	2,263%	-0,334%	1,440%
	2*15Y-(1M+30Y)	0,941%	0,61%	-0,02	2,97	0,3	87,50%	-1,398%	2,809%	-0,069%	1,923%
Ao fim de 5 anos	2*5Y-(1Y+10Y)	0,146%	0,30%	-0,03	2,99	0,5	77,38%	-0,979%	1,092%	-0,351%	0,637%
	2*10Y-(5Y+15Y)	0,287%	0,14%	0,06	3,00	1,5	48,28%	-0,207%	0,788%	0,058%	0,516%
	2*15Y-(10Y+20Y)	0,116%	0,06%	0,06	3,01	1,5	47,45%	-0,088%	0,337%	0,019%	0,212%
	2*5Y-(1M+10Y)	0,215%	0,55%	-0,04	3,00	0,6	73,11%	-1,847%	1,890%	-0,692%	1,113%
	2*10Y-(1M+20Y)	0,906%	0,67%	0,01	2,94	0,5	76,59%	-1,186%	3,420%	-0,203%	1,994%
	2*15Y-(1M+30Y)	1,265%	0,76%	0,03	2,93	1,1	58,75%	-1,120%	4,113%	0,018%	2,511%

	Análise de Componentes Principais										
	Curvatura	Média	Desvio Padrão	Assimetria	Curtose	JB	Prob	Min	Max	Perc.(5%)	Perc.(95%)
Histórica	2*5Y-(1Y+10Y)	0,182%	0,28%	0,27	2,07	106,1	0,00%	-0,523%	0,870%	-0,209%	0,649%
	2*10Y-(5Y+15Y)	0,245%	0,14%	-0,41	2,07	142,7	0,00%	-0,160%	0,760%	-0,007%	0,431%
	2*15Y-(10Y+20Y)	0,137%	0,07%	-1,05	18,63	22859,0	0,00%	-0,731%	0,488%	0,041%	0,234%
	2*5Y-(1M+10Y)	0,355%	0,50%	-0,01	2,51	22,3	0,00%	-0,803%	1,763%	-0,487%	1,161%
	2*10Y-(1M+20Y)	0,981%	0,60%	0,22	2,50	41,5	0,00%	-0,264%	2,593%	0,013%	2,031%
	2*15Y-(1M+30Y)	1,524%	0,68%	0,21	2,48	40,9	0,00%	0,195%	3,356%	0,485%	2,579%
Ao fim de 1 ano	2*5Y-(1Y+10Y)	-0,067%	0,23%	-0,11	3,08	5,7	5,80%	-0,882%	0,622%	-0,436%	0,304%
	2*10Y-(5Y+15Y)	0,225%	0,12%	-0,04	2,90	2,0	37,38%	-0,171%	0,584%	0,034%	0,415%
	2*15Y-(10Y+20Y)	0,133%	0,04%	-0,06	2,89	2,6	27,85%	-0,005%	0,260%	0,067%	0,199%
	2*5Y-(1M+10Y)	-0,162%	0,43%	-0,09	3,02	3,2	20,51%	-1,718%	1,175%	-0,878%	0,533%
	2*10Y-(1M+20Y)	0,422%	0,51%	-0,11	3,08	5,7	5,87%	-1,439%	1,957%	-0,412%	1,252%
	2*15Y-(1M+30Y)	0,988%	0,58%	-0,12	3,04	5,7	5,79%	-1,204%	2,787%	0,016%	1,933%
Ao fim de 5 anos	2*5Y-(1Y+10Y)	0,131%	0,29%	-0,03	2,93	1,0	59,45%	-0,804%	1,213%	-0,361%	0,604%
	2*10Y-(5Y+15Y)	0,233%	0,14%	0,03	2,92	1,1	57,91%	-0,290%	0,667%	0,011%	0,463%
	2*15Y-(10Y+20Y)	0,134%	0,05%	0,02	2,95	0,5	76,82%	-0,051%	0,279%	0,056%	0,217%
	2*5Y-(1M+10Y)	0,257%	0,53%	-0,05	2,93	1,7	41,97%	-1,560%	2,103%	-0,625%	1,097%
	2*10Y-(1M+20Y)	0,858%	0,67%	-0,02	2,91	0,9	62,25%	-1,260%	3,341%	-0,259%	1,931%
	2*15Y-(1M+30Y)	1,398%	0,75%	-0,01	2,92	0,7	69,58%	-0,998%	4,136%	0,155%	2,641%

Tabela 5: Resultados da Simulação para N&S e ACP – estatísticas descritivas das curvaturas

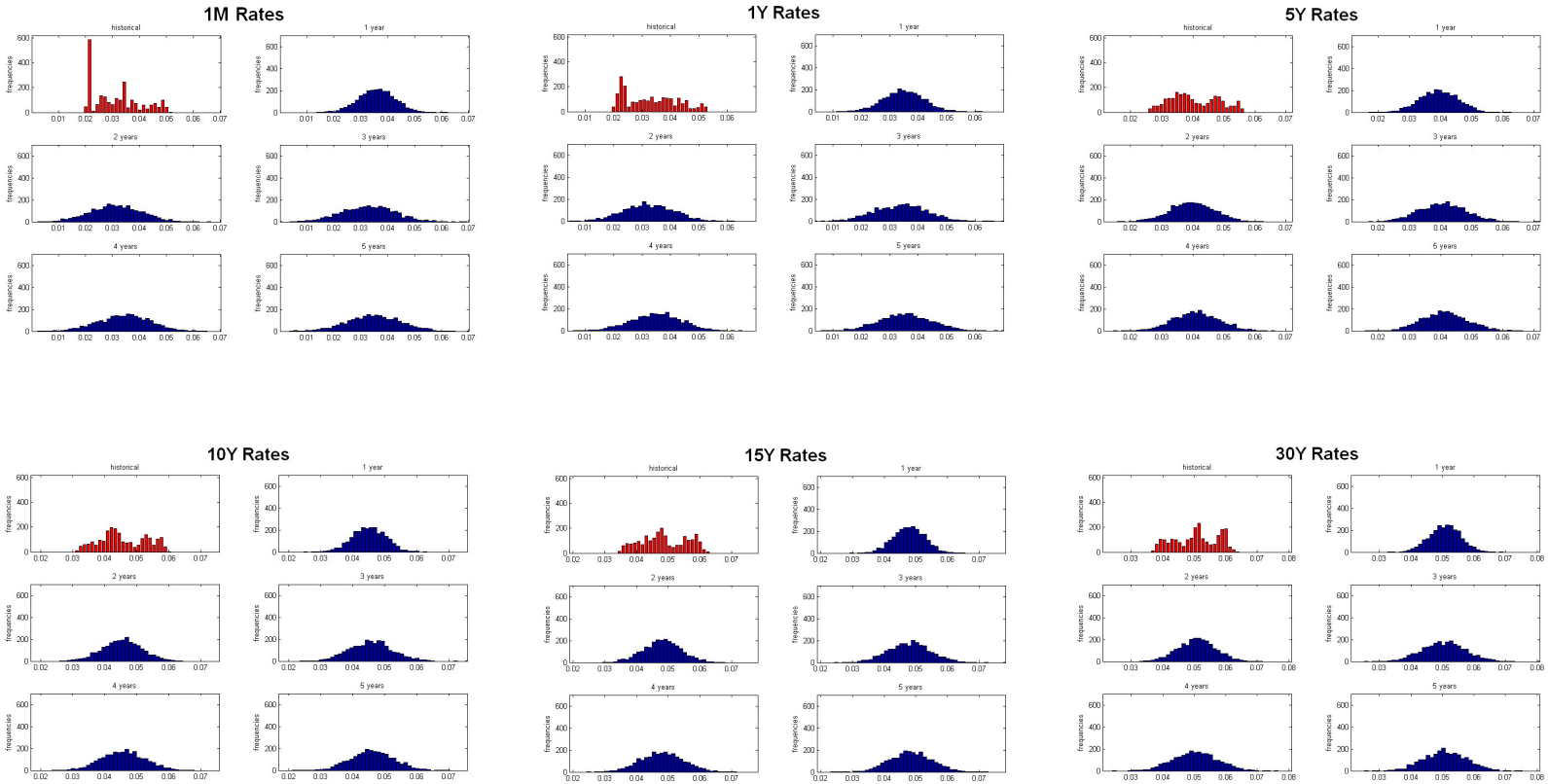

Figura 9: Resultados das Simulações de N&S – histogramas das taxas de juro

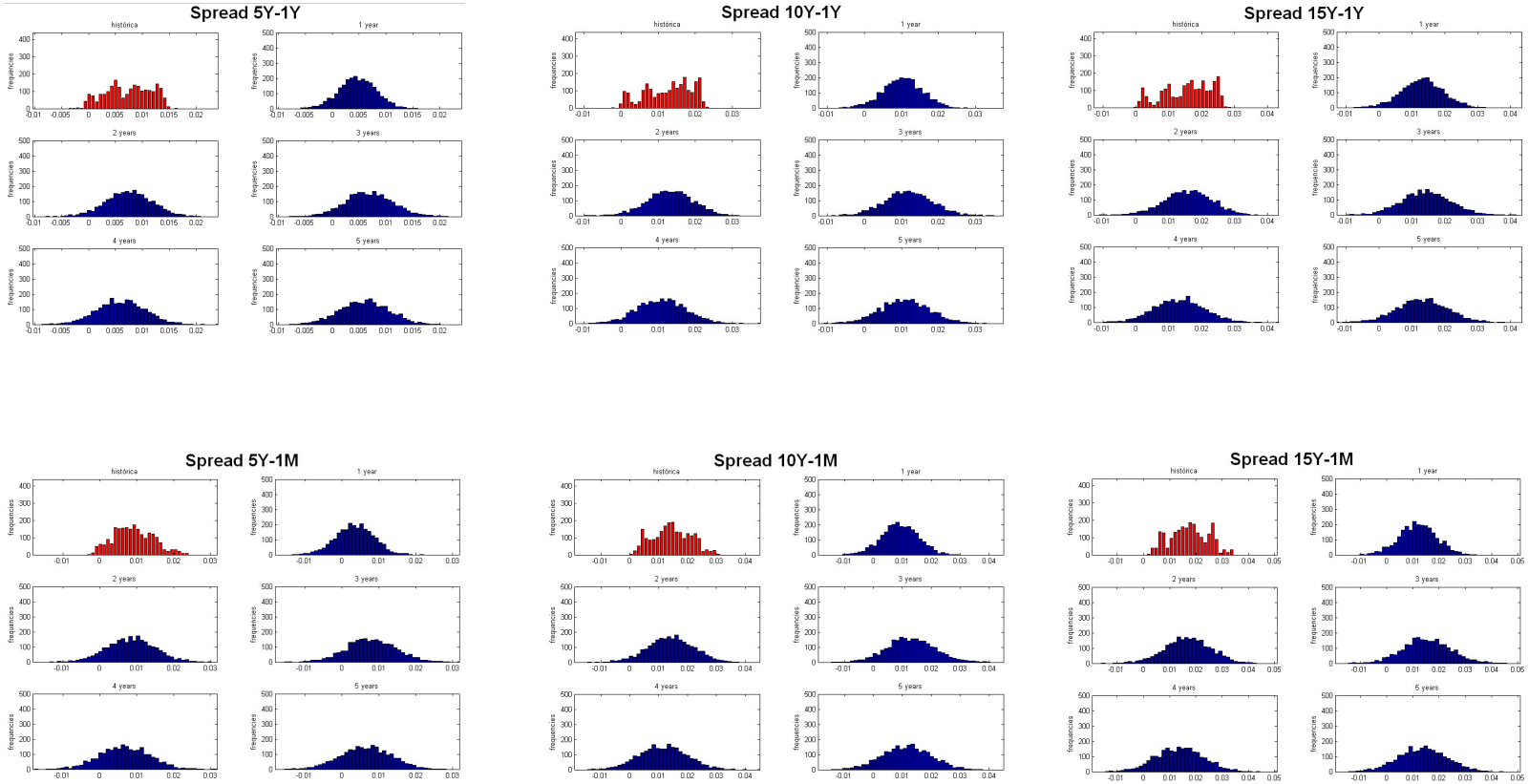

Figura 10: Resultados das Simulações de N&S – histogramas dos spreads

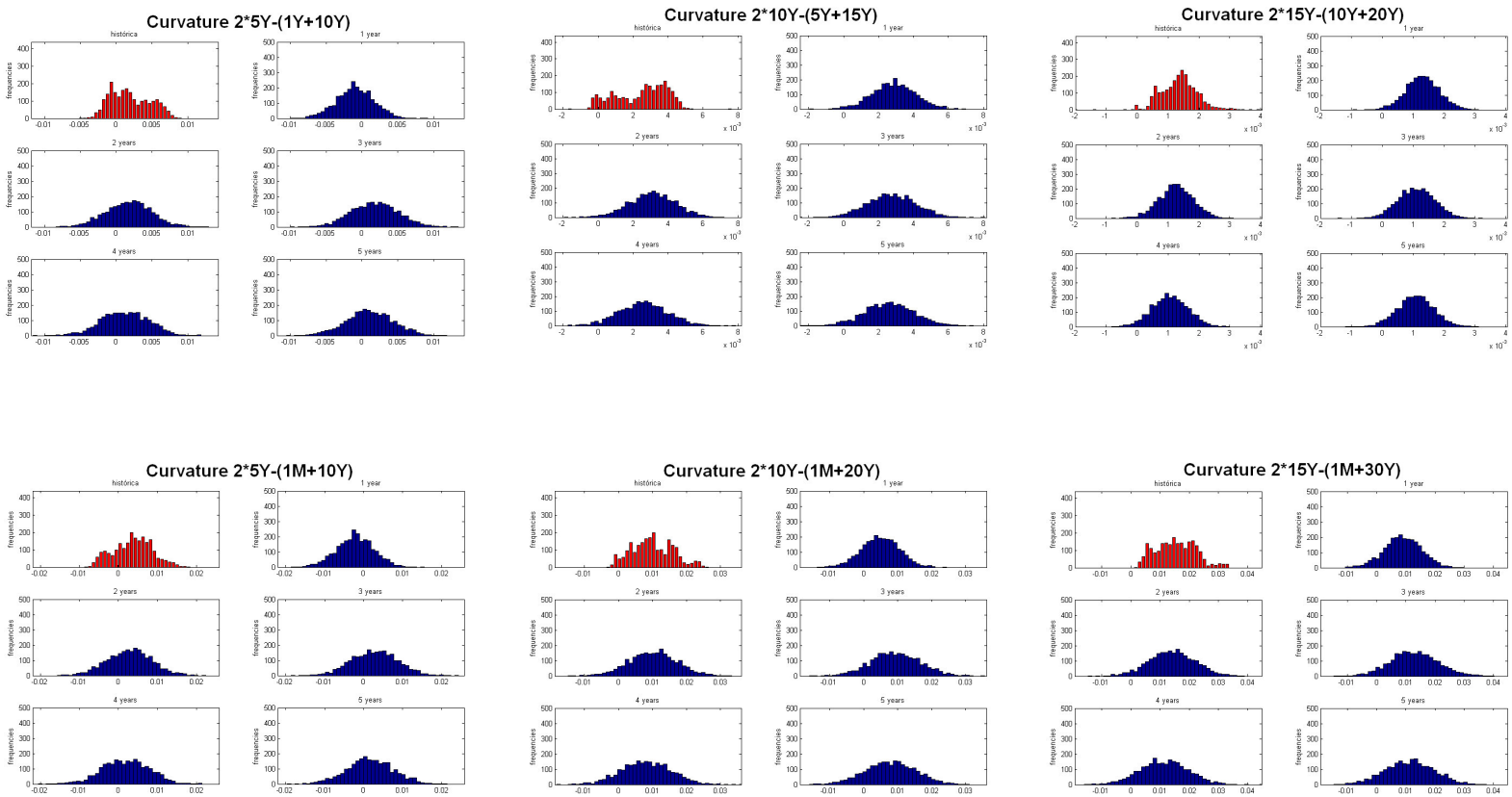

Figura 11: Resultados das Simulações de N&S – histogramas das curvaturas

9. Conclusão

Este estudo teve o propósito de modelizar e realizar uma análise de cenários da EPTJ com a abordagem de N&S.

Na sua essência, esta metodologia tem fortes semelhanças com a ACP, que são ilustradas com os resultados das estimações e simulações apresentadas ao longo do texto. A ACP teria algumas vantagens sobre N&S no que se refere ao ajustamento "in-sample" à EPTJ observada, em grande parte devido a ter mais graus de liberdade (pesos e factores) do que N&S (cujos pesos estão parametrizados). Por outro lado, a abordagem de N&S beneficia de gerar taxas forward não negativas ao longo de todo o espectro de maturidades, enquanto não sabemos em que medida a simulações pela ACP estão expostas a esta possibilidade, dado que não são necessariamente suaves como as simuladas pela metodologia de N&S.

Com excepção da assimetria e curtose, as simulações apresentadas neste trabalho descrevem com sucesso a distribuição histórica das taxas de juro, spreads e curvaturas. Isto é válido para qualquer prazo que escolhamos para fazer as simulações. Os melhores desenvolvimentos que podem ser incorporados nos modelos são aqueles que podem replicar a não-normalidade das taxas de juro, historicamente observada.

Finalmente, e ressalvando a observação que se acabou de fazer, a metodologia de N&S é fiável para simular a EPTJ.

10. Investigação futura

Como se disse antes, podem fazer-se melhorias a este estudo analisando o poder explicativo adicional das extensões de Nelson e Siegel, na linha de investigação de Pooter (2007). O terceiro factor explica menos do que o segundo e um quarto factor explicaria menos do que o terceiro. Tendo em mente os resultados da ACP, devemos esperar que o quarto factor tenha pouco poder explicativo adicional. Por outro lado, problemas e dificuldades na estimação dos modelos com mais parâmetros estão extensivamente documentadas na literatura: questões de não identificação, não convergência e dependência dos valores iniciais.

Outra melhoria seria fazer o paràmetro de decaimento variável no tempo. De acordo com os resultados de Pooter (2007), a melhoria no ajustamento do modelo quando deixamos o

parâmetro de decaimento variar no tempo é menor do que quando adicionamos um quarto factor relacionado com a curvatura.

Finalmente, deveríamos considerar nos modelos as interacções entre a evolução da EPTJ e variáveis macroeconómicas fundamentais, como as expectativas de inflação e o output gap. Sabemos que o nível da EPTJ está relacionada com a inflação (como proxy das expectativas de inflação) e a inclinação está ligada à dinâmica cíclica da economia dada pela proporção da capacidade produtiva que é de facto utilizada, por exemplo.

No caso do terceiro factor, não há na literatura sugestões de variáveis macroeconómicas relacionadas ainda que, d o ritmo da produção científica nesta área, mais resultados são esperados em breve.

11. Bibliografia

- Alexander, C. (2001), "Market Models: A Guide to Financial Data Analysis", John Wiley & Sons
- Ang, A. e Piazzesi, M. (2003), "A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables", Journal of Monetary Economics, Vol. 50, 745-787
- BIS (2005), "Zero-coupon yield curves: technical documentation", Bank for International Settlements, BIS Papers, No. 25
- Bliss, R. R. (1996), "Testing the Term Structure Estimation Methods", Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 96-12a
- Chou, Shuo-hong (2006), "The Predictability in the Shape of the Term Structure of Interest Rates: Empirical Study in Taiwan Government Bonds", E-Thesis, School of Finance, National Taiwan University of Science and Technology (http://pc01.lib.ntust.edu.tw/ETD-db)
- Diebold, F. e Li, C. (2006), "Forecasting the term structure of government bond yields", Journal of Econometrics, vol. 130, No. 2, 337-364
- Diebold, F., Piazzesi, M. e Rudebusch, G. (2005), "Modeling Bond Yields in Finance and Macroeconomics", Working Paper
- Diebold, F., Rudebusch, G. e Aruoba, B. (2005), "The macroeconomy and the yield curve: a dynamic latent factor approach", Journal of Econometrics, vol. 131, 309-338
- Fabozzi, F., Martellini, L. e Priaulet, P. (2005), "Predictability in the Shape of Term Structure of Interest Rates", The Journal of Fixed Income, vol. 15, 40-53

- Galitz, L. (1995), Financial Engineering - Tools and Techniques to Manage Financial Risk, Revised Edition, Great Britain, FT Pitman Publishing
- Geyer, A. e Mader, R. (1999), “Estimation of the Term Structure of Interest Rates; a Parametric Approach”, Working Paper 37, Oesterreichische Nationalbank
- Litterman, R. e Scheinkman, J. (1991), “Common Factors Affecting Bond Returns”, Journal of Fixed Income, 1, 54-61.
- Luna, F. E. (2006), “Aplicação da metodologia de componentes principais na análise da estrutura a termo de taxa de juros brasileira e no cálculo do valor em risco”, Texto para Discussão,n.º 1146, IPEA
- Machado, J. F. , Marques, C. R., Neves, P. D. e Afonso, A., G. (2001), “Using the First Principal Component as a Core Inflation Indicator”, Banco de Portugal, Economic Research Department WP 9-01, September
- Nelson, C. e Siegel, A. (1987), Parsimonious Modeling of Yield Curve, Journal of Business, vol. 60, 473-489
- Pooter, M. (2007), “Examining the Nelson-Siegel class of term structure models”, Tinbergen Institute, Erasmus University Rotterdam Working Paper
- Rudebusch e Wu (2004), “A Macro-Finance Model of the Term Structure, Monetary Policy and the Economy”, Working Paper, Federal Reserve Bank of San Francisco
- Stock, J. H. e Watson, M. W. (1988), “Variable Trends in Economic Time Series”, The Journal of Economic Perspectives, Vol. 2, No. 3, pp. 147-174
- Svensson, L. E. (1994), “Estimating and Interpreting Forward Interest Rates: Sweden 1992-1994”, Centre for Economic Policy Research Discussion Paper 1051